

Chữa đề Toán điều kiện – vòng 1 Chuyên Khoa học Tự nhiên Ngày 23/5/2026

Câu I.

1) Ta có phương trình:

$$3x + \sqrt[3]{(2+3x)(2-x)}(\sqrt[3]{2+3x} - 2\sqrt[3]{2-x}) = 6.$$

Đặt $a = \sqrt[3]{2+3x}$, $b = \sqrt[3]{2-x}$. Khi đó $a^3 = 2+3x$, $b^3 = 2-x$, suy ra:

$$a^3 + 3b^3 = (2+3x) + 3(2-x) = 8. (1)$$

Mặt khác, từ $a^3 = 2+3x$ ta có $3x = a^3 - 2$. Thay vào phương trình đã cho, ta được:

$$a^3 - 2 + ab(a - 2b) = 6.$$

$$a^3 + a^2b - 2ab^2 = 8(2).$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$a^3 + a^2b - 2ab^2 = a^3 + 3b^3.$$

$$a^2b - 2ab^2 - 3b^3 = 0.$$

$$b(a^2 - 2ab - 3b^2) = 0.$$

$$b(a - 3b)(a + b) = 0.$$

Vậy ta xét ba trường hợp.

Nếu $b = 0$, thì $\sqrt[3]{2-x} = 0$, suy ra $2-x = 0$, nên $x = 2$.

Nếu $a = 3b$, thay vào (1) ta được:

$$(3b)^3 + 3b^3 = 8.$$

Suy ra $30b^3 = 8$, nên $b^3 = \frac{4}{15}$. Mà $b^3 = 2-x$, do đó:

$$2-x = \frac{4}{15}.$$

$$x = \frac{26}{15}.$$

Nếu $a = -b$, thay vào (1) ta được:

$$(-b)^3 + 3b^3 = 8.$$

$$2b^3 = 8$$

$$b^3 = 4.$$

Ta có $b^3 = 2 - x$, do đó:

$$2 - x = 4.$$

$$x = -2.$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x \in \left\{-2; \frac{26}{15}; 2\right\}.$$

2) Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6xy = 2, \\ 3(4x^2 + 9y^2) = 6xy(4x^2 + 9y^2) + 30xy + 12. \end{cases}$$

Đặt $a = 2x$, $b = 3y$. Khi đó $6xy = ab$ và $4x^2 + 9y^2 = a^2 + b^2$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a + b + ab = 2, \\ 3(a^2 + b^2) = ab(a^2 + b^2) + 5ab + 12(1). \end{cases}$$

Đặt $S = a + b$, $P = ab$. Từ phương trình thứ nhất, ta có $S + P = 2$, suy ra:

$$S = 2 - P.$$

Ta có:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = S^2 - 2P.$$

Thay vào phương trình (1), ta được:

$$3(S^2 - 2P) = P(S^2 - 2P) + 5P + 12.$$

Thay $S = 2 - P$, ta có:

$$3[(2 - P)^2 - 2P] = P[(2 - P)^2 - 2P] + 5P + 12.$$

$$-P(P^2 - 9P + 27) = 0.$$

$$P(P^2 - 9P + 27) = 0.$$

Xét phương trình $P^2 - 9P + 27 = 0$, ta có:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27 = 81 - 108 = -27 < 0.$$

Vì vậy phương trình này vô nghiệm. Do đó $P = 0$. Khi đó $S = 2$, suy ra:

$$a + b = 2, \quad ab = 0.$$

Do đó $(a, b) = (0, 2)$ hoặc $(a, b) = (2, 0)$.

Với $(a, b) = (0, 2)$, ta có $2x = 0$ và $3y = 2$, suy ra $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$.

Với $(a, b) = (2, 0)$, ta có $2x = 2$ và $3y = 0$, suy ra $x = 1$, $y = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm:

$$(x, y) = \left(0, \frac{2}{3}\right), (1, 0).$$

Câu II.

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$8x^3 + 27y^3 = 18xy + 4x + 6y + 4$$

Lời giải chi tiết:

Đặt $a = 2x$ và $b = 3y$. Vì x, y là các số nguyên nên a và b cũng là các số nguyên. Phương trình ban đầu được viết lại thành:

$$a^3 + b^3 = 3ab + 2a + 2b + 4$$

$$\Rightarrow (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab - 2(a + b) - 4 = 0$$

Tiếp tục đặt $S = a + b$ và $P = ab$ (với $S, P \in \mathbb{Z}$ và điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P$).

Phương trình trở thành:

$$S^3 - 3SP - 3P - 2S - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3P(S + 1) = S^3 - 2S - 4 \quad (*)$$

Dễ thấy $S = -1$ không phải là nghiệm của phương trình vì khi đó vế trái bằng 0, còn vế phải bằng $(-1)^3 - 2(-1) - 4 = -3 \neq 0$.

Với $S \neq -1$, ta rút $3P$ từ phương trình (*):

$$3P = \frac{S^3 - 2S - 4}{S + 1}$$

$$3P = \frac{(S^3 + S^2) - (S^2 + S) - (S + 1) - 3}{S + 1}$$

$$\Rightarrow 3P = \frac{S^2(S + 1) - S(S + 1) - 1(S + 1) - 3}{S + 1}$$

$$\Rightarrow 3P = S^2 - S - 1 - \frac{3}{S + 1}$$

Vì a, b là các số nguyên nên tổng S và tích P phải là các số nguyên. Suy ra $3P$ cũng là một số nguyên. Khi đó $S + 1$ là ước của 3. Tập các ước của 3 là: $U(3) = \{1, -1, 3, -3\}$.

- **Trường hợp 1:** $S + 1 = 1 \Rightarrow S = 0$. Thay vào biểu thức của $3P$:

$$3P = 0^2 - 0 - 1 - \frac{3}{1} = -4 \Rightarrow P = -\frac{4}{3}$$

(Loại vì P không phải là số nguyên).

- **Trường hợp 2:** $S + 1 = -1 \Rightarrow S = -2$. Thay vào biểu thức của $3P$:

$$3P = (-2)^2 - (-2) - 1 - \frac{3}{-1} = 4 + 2 - 1 + 3 = 8 \Rightarrow P = \frac{8}{3}$$

(Loại vì P không phải là số nguyên).

- **Trường hợp 3:** $S + 1 = 3 \Rightarrow S = 2$. Thay vào biểu thức của $3P$:

$$3P = 2^2 - 2 - 1 - \frac{3}{3} = 4 - 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow P = 0$$

(Thỏa mãn điều kiện $P \in \mathbb{Z}$).

- **Trường hợp 4:** $S + 1 = -3 \Rightarrow S = -4$. Thay vào biểu thức của $3P$:

$$3P = (-4)^2 - (-4) - 1 - \frac{3}{-3} = 16 + 4 - 1 + 1 = 20 \Rightarrow P = \frac{20}{3}$$

(Loại vì P không phải là số nguyên).

Từ trường hợp 3, ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét đảo, a và b là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - 2t + 0 = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = 2 \end{bmatrix}$$

Ta có hai hoán vị cho cặp (a, b) là $(0, 2)$ và $(2, 0)$.

- **Khả năng 1:** Nếu $a = 0$ và $b = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

(Loại vì y phải là số nguyên).

- **Khả năng 2:** Nếu $a = 2$ và $b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(Thỏa mãn điều kiện $x, y \in \mathbb{Z}$).

Kết luận: Cặp số nguyên (x, y) duy nhất thỏa mãn đẳng thức là $(1, 0)$.

2) Đặt $x_i = \frac{2y_i}{1+y_i^2}$ với $i = 1, 2, \dots, 6$.

Chứng minh $-1 \leq x_i \leq 1$ với mọi số thực y_i . Thật vậy:

- Xét: $1 - x_i = 1 - \frac{2y_i}{1+y_i^2} = \frac{1+y_i^2-2y_i}{1+y_i^2} = \frac{(y_i-1)^2}{1+y_i^2} \geq 0 \Rightarrow x_i \leq 1$.
- Xét: $1 + x_i = 1 + \frac{2y_i}{1+y_i^2} = \frac{1+y_i^2+2y_i}{1+y_i^2} = \frac{(y_i+1)^2}{1+y_i^2} \geq 0 \Rightarrow x_i \geq -1$.

Vậy với mọi i , ta có: $x_i \in [-1; 1] \Rightarrow x_i^2 \in [0; 1]$.

Theo đề bài $y_0 = y_6$ và $y_7 = y_1$

Suy ra: $x_0 = x_6$ và $x_7 = x_1$.

Thay ẩn x_i vào biểu thức M , ta được: $M = \sum_{i=1}^6 x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$

Khai triển tổng này ra, ta có:

$$\begin{aligned} M &= x_1^2(x_2 - x_6) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_4 - x_2) + x_4^2(x_5 - x_3) + x_5^2(x_6 - x_4) + x_6^2(x_1 - x_5) \\ &= [x_2(x_1^2 - x_3^2) + x_4(x_3^2 - x_5^2) + x_6(x_5^2 - x_1^2)] + [x_1(x_6^2 - x_2^2) + x_3(x_2^2 - x_4^2) + x_5(x_4^2 - x_6^2)] \end{aligned}$$

Đặt $P = x_1(x_6^2 - x_2^2) + x_3(x_2^2 - x_4^2) + x_5(x_4^2 - x_6^2)$

$Q = x_2(x_1^2 - x_3^2) + x_4(x_3^2 - x_5^2) + x_6(x_5^2 - x_1^2)$

Khi đó $M = P + Q$.

Xét biểu thức thứ nhất:

$$P = x_2(x_1^2 - x_3^2) + x_4(x_3^2 - x_5^2) + x_6(x_5^2 - x_1^2)$$

Vì $x_2, x_4, x_6 \in [-1; 1]$, nên ta có tính chất cơ bản: với một số thực X bất kỳ và $k \in [-1; 1]$ thì $k \cdot X \leq |X|$. Áp dụng vào P, ta được:

$$A \leq |x_1^2 - x_3^2| + |x_3^2 - x_5^2| + |x_5^2 - x_1^2| \quad (*)$$

Bây giờ, ta xét 3 số $A = x_1^2, B = x_3^2, C = x_5^2$.

Do $x_i^2 \in [0; 1]$ nên $A, B, C \in [0; 1]$.

Giả sử trong 3 số A, B, C , có một số lớn nhất là max và một số nhỏ nhất là min.

Với $A \geq B \geq C \Rightarrow (A - B) + (B - C) + (A - C) = 2A - 2C = 2(\max - \min)$

Tương tự với các trường hợp còn lại

Khi đó biểu thức $|A - B| + |B - C| + |C - A| = 2(\max - \min)$

Do $\max \leq 1$ và $\min \geq 0$, ta suy ra:

$$|x_1^2 - x_3^2| + |x_3^2 - x_5^2| + |x_5^2 - x_1^2| = 2(\max - \min) \leq 2(1 - 0) = 2$$

Từ đó: $P \leq 2$.

Hoàn toàn tương tự đối với biểu thức thứ hai:

$$Q = x_1(x_6^2 - x_2^2) + x_3(x_2^2 - x_4^2) + x_5(x_4^2 - x_6^2) \leq |x_6^2 - x_2^2| + |x_2^2 - x_4^2| + |x_4^2 - x_6^2|$$

Với $x_2^2, x_4^2, x_6^2 \in [0; 1]$, ta cũng chứng minh được: $Q \leq 2$.

Cộng vế theo vế, ta được:

$$M = P + Q \leq 2 + 2 = 4$$

Để $M = 4$, dấu “=” xảy ra khi: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, -1, 1, 0, -1)$.

Thử lại: Thế vào các phương trình đặt ẩn phụ $x_i = \frac{2y_i}{1+y_i^2}$, ta giải ra được bộ nghiệm tương ứng của y :

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$x_3 = -1 \Rightarrow y_3 = -1$$

$$x_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 1$$

$$x_5 = 0 \Rightarrow y_5 = 0$$

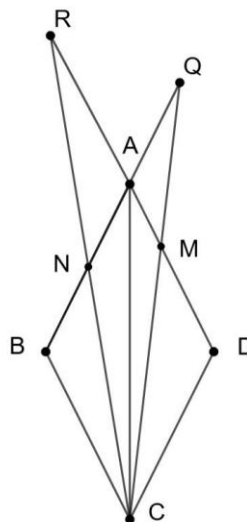
$$x_6 = -1 \Rightarrow y_6 = -1 \text{ (Thỏa mãn điều kiện đề bài là } y_i \text{ là các số thực bất kỳ).}$$

Kết luận:

Giá trị lớn nhất của biểu thức M là 4, đạt được khi $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (1, 0, -1, 1, 0, -1)$ hoặc các hoán vị vòng quanh tương tự.

Câu IV.

1. Chứng minh hai tam giác BCQ và DMC đồng dạng



Do $ABCD$ là hình thoi nên ta có

$$+ \widehat{BQC} = \widehat{MCD} \text{ (so le trong)} \quad (1)$$

$$+ \widehat{QBC} = \widehat{MDC} \text{ (hai góc đối bằng nhau)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), xét $\triangle BCQ$ và $\triangle DMC$ có: $\widehat{BQC} = \widehat{MCD}$; $\widehat{QBC} = \widehat{MDC}$ suy ra $\triangle BCQ \sim \triangle DMC$ (gg). (đpcm)

2. Chứng minh $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$

Theo chứng minh câu 1: $\triangle BCQ \sim \triangle DMC$ suy ra $\frac{BC}{DM} = \frac{BQ}{DC}$ (3)

Vì $ABCD$ là hình thoi $BC = DC = a$. Thay vào (3) ta được: $\frac{a}{DM} = \frac{BQ}{a}$ suy ra $BQ \cdot DM = a^2$ (4)

Xét $\triangle CBN$ và $\triangle RDC$:

$$\widehat{BCN} = \widehat{CRD} \text{ (so le trong, } BC \parallel AD)$$

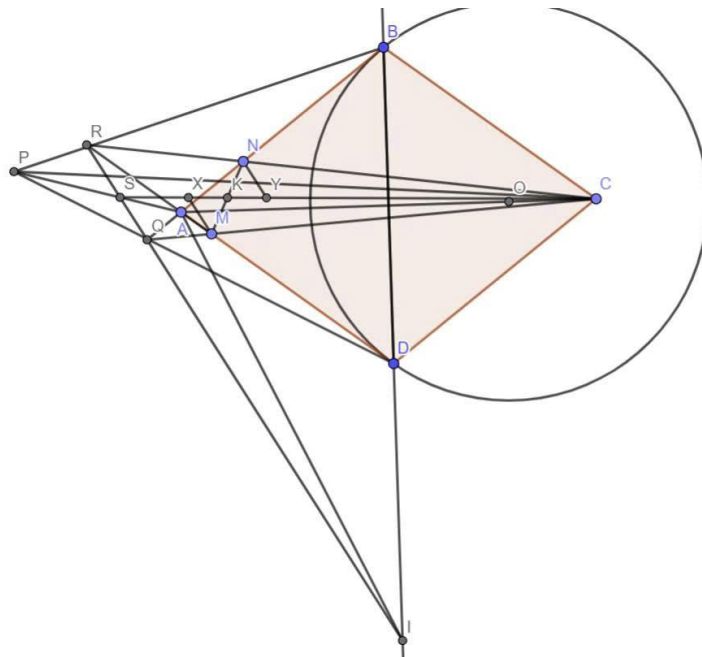
$$\widehat{NBC} = \widehat{RDC} \text{ (hai góc đối bằng nhau)}$$

Suy ra: $\triangle CBN \sim \triangle RDC$ (gg).

Từ đồng dạng, ta suy ra tỉ số: $\frac{CB}{RD} = \frac{BN}{DC} \Rightarrow \frac{a}{DR} = \frac{BN}{a} \Rightarrow BN \cdot DR = a^2$ (5)

Từ (4) và (5) ta suy ra: $BQ \cdot DM = BN \cdot DR$ suy ra $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$ (đpcm)

3. Chứng minh đường thẳng CS đi qua trung điểm MN



Gọi I là giao BD và QR .

+) Menelaus ΔAQR với B, I, D thẳng hàng:

$$\frac{IQ}{IR} \cdot \frac{DR}{DA} \cdot \frac{BA}{BQ} = 1 \quad \text{mà } DA = BA \Rightarrow \frac{IQ}{IR} = \frac{BQ}{DR} \quad (2)$$

+) ΔAQR :

$$\frac{\sin \widehat{QAI}}{\sin \widehat{RAI}} = \frac{S_{AQI} \cdot AR}{S_{ARI} \cdot AQ} = \frac{\frac{1}{2} AQ \cdot IQ \cdot \sin Q \cdot AR}{\frac{1}{2} AR \cdot IR \cdot \sin R \cdot AQ} = \frac{IQ \cdot \sin Q}{IR \cdot \sin R}$$

$$\text{Kết hợp (2)} \Rightarrow \frac{\sin \widehat{QAI}}{\sin \widehat{RAI}} = \frac{BQ \cdot \sin Q}{DR \cdot \sin R} \quad (3)$$

+) Lại có:

$$\frac{\sin \widehat{QAP}}{\sin \widehat{RAP}} = \frac{S_{AQP} \cdot AR}{S_{ARP} \cdot AQ} = \frac{\frac{1}{2} AQ \cdot BQ \cdot \sin Q \cdot AR}{\frac{1}{2} AR \cdot DR \cdot \sin R \cdot AQ} = \frac{BQ \cdot \sin Q}{DR \cdot \sin R} \quad (4)$$

$$\text{+) Từ (3), (4)} \Rightarrow \frac{\sin \widehat{QAI}}{\sin \widehat{RAI}} = \frac{\sin \widehat{QAP}}{\sin \widehat{RAP}}$$

$$\Rightarrow \frac{SQ}{SR} = \frac{IQ}{IR} \quad \text{Kết hợp với (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{SQ}{SR} = \frac{BQ}{DR} \quad (5)$$

+) $\Delta MDC \sim \Delta MAQ$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CQ} = \frac{CM}{CM + MQ} = \frac{MD}{MD + MA} = \frac{DM}{a} \quad (6)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{CN}{CR} = \frac{BN}{a} \quad (7)$$

+) Gọi K là giao CS với MN , ta chứng minh K là trung điểm MN .

Qua M kẻ đường thẳng song song với QR cắt CS tại X .

Từ N kẻ đường thẳng song song với QR cắt CS tại Y

$$\text{+) } MX // SQ \Rightarrow \frac{MX}{SQ} = \frac{CM}{CQ} \Rightarrow MX = SQ \cdot \frac{DM}{a} \quad (\text{do (6)})$$

$$\text{Tương tự: } NY // SR \Rightarrow \frac{NY}{SR} = \frac{CN}{CR} \Rightarrow NY = SR \cdot \frac{BN}{a} \quad (\text{do (7)})$$

$$\Rightarrow \frac{MX}{NY} = \frac{SQ}{SR} \cdot \frac{DM}{BN} = \frac{BQ}{DR} \cdot \frac{DR}{BQ} = 1 \quad (\text{do (1), (5)})$$

$$\Rightarrow MX = NY \text{ mà } MX // NY \quad (\text{cùng song song với } QR)$$

$\Rightarrow MXNY$ là hình bình hành

Mà MN cắt XY tại $K \Rightarrow K$ trung điểm MN

mà $K \in CS \Rightarrow$ Đường thẳng CS đi qua trung điểm MN (đpcm)

Câu IV.

Ta tính tổng số đo của tất cả các góc trên hình vẽ là S .

Cách 1: Đếm theo 2 loại điểm:

- Loại 1: 5 điểm của ngũ giác

$$S_1 = 540^\circ$$

- Loại 2: 100 điểm bên trong, tổng số đo các góc của mỗi điểm là 360°

$$S_2 = 100 \cdot 360^\circ$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = 180^\circ(3 + 2 \cdot 100) = 180^\circ \cdot 203$$

Cách 2: Đếm theo số tam giác Có t tam giác, mỗi tam giác có tổng số góc là 180°

$$\Rightarrow S = 180^\circ \cdot t$$

$$\Rightarrow 180^\circ \cdot t = 203 \cdot 180^\circ$$

$$\Rightarrow t = 203$$

$\Rightarrow$ Có 203 tam giác.