

ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ CHUYÊN TOÁN THI VÀO 10 HÀ NỘI NĂM 2026

Câu I.

1) Gọi tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 125 là tập Ω . Các phần tử của tập Ω gồm:

$$\Omega = \{0; 1; 2; 3; \dots; 124\}$$

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = 125$$

Gọi A là biến cố: “Số được chọn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương liên tiếp”.

Gọi hai số tự nhiên liên tiếp là n và $n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, số có dạng tổng hai số chính phương liên tiếp sẽ là: $n^2 + (n + 1)^2$.

Theo đề bài, số này phải nhỏ hơn 125, ta có bất phương trình:

$$\begin{aligned}n^2 + (n + 1)^2 &< 125 \\2n^2 + 2n + 1 &< 125 \\2n^2 + 2n - 124 &< 0 \\n^2 + n - 62 &< 0\end{aligned}$$

Các số tính được đều phân biệt, do đó tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A có 8 phần tử:

$$n(A) = 8$$

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{125}$$

Xác suất cần tìm là $\frac{8}{125}$.

2) Theo giả thiết, ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases}a + b + c = 0 & (1) \\a^2 + c^2 - 4bc - 2b + 2 = 0 & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta suy ra:

$$a = -(b + c)$$

Thay $a = -(b + c)$ vào phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned}[-(b + c)]^2 + c^2 - 4bc - 2b + 2 &= 0 \\b^2 + 2bc + c^2 + c^2 - 4bc - 2b + 2 &= 0 \\b^2 - 2bc + 2c^2 - 2b + 2 &= 0\end{aligned}$$

Tiến hành nhóm các hạng tử để xuất hiện các hằng đẳng thức dạng bình phương thiếu và đưa về bình phương hoàn chỉnh:

$$\begin{aligned}b^2 - 2b(c + 1) + 2c^2 + 2 &= 0 \\[b^2 - 2b(c + 1) + (c + 1)^2] - (c + 1)^2 + 2c^2 + 2 &= 0 \\(b - c - 1)^2 - (c^2 + 2c + 1) + 2c^2 + 2 &= 0 \\(b - c - 1)^2 + c^2 - 2c + 1 &= 0 \\(b - c - 1)^2 + (c - 1)^2 &= 0\end{aligned}$$

Vì $(b - c - 1)^2 \geq 0$ và $(c - 1)^2 \geq 0$ với mọi số thực b, c , nên tổng của chúng bằng 0 khi và chỉ khi cả hai số hạng đồng thời bằng 0:

$$\begin{cases} b - c - 1 = 0 \\ c - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c + 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Thay $b = 2$ và $c = 1$ trở lại vào phương trình $a = -(b + c)$, ta tìm được a :

$$a = -(2 + 1) = -3$$

Với bộ số $(a; b; c) = (-3; 2; 1)$, giá trị của biểu thức M là:

$$M = a \cdot b \cdot c = (-3) \cdot 2 \cdot 1 = -6$$

Giá trị của biểu thức cần tìm là $M = -6$.

Câu II.

1) Từ giả thiết đề bài, ta biến đổi đẳng thức thành: $n \cdot abc = a^2 + b^2 + c^2 + 1$ (*)

Chứng minh bình phương của một số nguyên chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

- Nếu x chẵn ($x = 2k$), thì $x^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}$.
- Nếu x lẻ ($x = 2k + 1$), thì $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$.

Ta xét các trường hợp về tính chẵn lẻ của a, b, c :

- Nếu a, b, c đều chẵn: a^2, b^2, c^2 đều chia hết cho 4.

Khi đó $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)$ chia 4 dư 1 (là số lẻ).

Mà $n \cdot abc$ là số chẵn (do a, b, c chẵn nên tích abc chẵn). (Vô lý) (1)

- Nếu 2 số chẵn, 1 số lẻ: Giả sử a, b chẵn, c lẻ.

Khi đó $a^2 \equiv 0 \pmod{4}, b^2 \equiv 0 \pmod{4}, c^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + 1) \equiv 0 + 0 + 1 + 1 = 2 \pmod{4}$.

Suy ra vế phải không chia hết cho 4. Nhưng $n \cdot abc$, vì có 2 số chẵn nên $abc : 4 \Rightarrow (n \cdot abc) : 4$.

Vế trái chia hết cho 4, vế phải chia 4 dư 2. (Vô lý) (2)

- Nếu có 1 số chẵn, 2 số lẻ: Giả sử a chẵn, b, c lẻ.

Khi đó vế phải $(a^2 + b^2 + c^2 + 1) \equiv 0 + 1 + 1 + 1 = 3 \pmod{4}$ (là số lẻ).

Vế trái $n \cdot abc$ lại là số chẵn (do a chẵn). (Vô lý) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra a, b, c đều phải là số lẻ.

Chứng minh: Bình phương của mọi số lẻ chia 8 luôn dư 1.

- Với $x = 2k + 1$, ta có $x^2 = 4k(k + 1) + 1$. Vì $k(k + 1)$ là tích 2 số nguyên liên tiếp nên luôn chẵn, tức là $k(k + 1) : 2 \Rightarrow 4k(k + 1) : 8$. Suy ra $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Áp dụng tính chất này, ta có: $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ $c^2 \equiv 1 \pmod{8}$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \pmod{8}$

Nghĩa là vế phải có dạng $8k + 4 = 4(2k + 1)$ (với k là số tự nhiên).

Thay vào (*), ta được: $n \cdot abc = 4(2k + 1)$

Vì a, b, c đều là các số lẻ nên tích abc là một số lẻ.

Chứng minh n chia hết cho 4:

- Từ $n \cdot abc = 4(2k + 1)$, vế phải chia hết cho 4.

Do abc là số lẻ nên để tích $(n \cdot abc)$ chia hết cho 4 thì n phải chia hết cho 4.

Chứng minh n không chia hết cho 8:

- Giả sử phản chứng n chia hết cho 8 ($n = 8m$).

Khi đó $(n \cdot abc) = 8m \cdot abc$ sẽ chia hết cho 8.

Mà $4(2k + 1)$ (hay $8k + 4$) lại chia 8 dư 4, tức là không chia hết cho 8. (Vô lý)

Chứng tỏ n không thể chia hết cho 8.

Kết luận: n chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8. (Điều phải chứng minh)

2) Thực hiện chia đa thức cho cả hai vế:

$$x^2 - 2x + 4 - \frac{5}{x+2} = 2y - 1 + \frac{1}{2y+1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 5 - 2y = \frac{5}{x+2} + \frac{1}{2y+1} \quad (*)$$

Đặt $k = \frac{5}{x+2} + \frac{1}{2y+1} \in \mathbb{Z}$.

Nếu $y = 0$, phương trình ban đầu trở thành $\frac{x^3+3}{x+2} = 0 \Rightarrow x^3 + 3 = 0$ (Vô nghiệm với $x \in \mathbb{N}$). Vậy $y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2y+1} \leq \frac{1}{3}$. Kết hợp với $x \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{x+2} \leq \frac{5}{2}$.

Suy ra miền giá trị của k :

$$0 < k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6} < 3$$

Do $k \in \mathbb{Z}$, ta chỉ có 2 trường hợp: $k \in \{1, 2\}$

Trường hợp 1: $k = 1$

$$\frac{5}{x+2} + \frac{1}{2y+1} = 1 \Rightarrow \frac{5}{x+2} = 1 - \frac{1}{2y+1} = \frac{2y}{2y+1}$$

$$\Rightarrow 5(2y+1) = 2y(x+2) \Rightarrow 10y+5 = 2xy+4y \Rightarrow 2y(x-3) = 5$$

Điều này vô lý vì $2y$ luôn là số chẵn, trong khi các ước của 5 đều là số lẻ. (Vô nghiệm).

Trường hợp 2: $k = 2$ Vì $\frac{1}{2y+1} \leq \frac{1}{3}$ nên $\frac{5}{x+2} = 2 - \frac{1}{2y+1} \geq 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

$$\Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{0,1\}$

* Nếu $x = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{2y+1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2y+1} = -\frac{1}{2}$ (Loại vì $y \notin \mathbb{N}$).

* Nếu $x = 1 \Rightarrow \frac{5}{3} + \frac{1}{2y+1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2y+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2y+1 = 3 \Rightarrow y = 1$.

Thử lại cặp (1; 1) vào biểu thức vế trái của (*): $1^2 - 2(1) + 5 - 2(1) = 2$. Kết quả đúng với giá trị $k = 2$.

Vậy cặp số tự nhiên $(x; y)$ duy nhất thỏa mãn là (1; 1)

Câu III.

1) Ta có : $4n^2 + p^3 + 4p^2 - 8p - 32 = 4n^2 + p^2(p+4) - 8(p+4) = 4n^2 + (p^2 - 8)(p+4)$

Theo đề bài, biểu thức này chia hết cho $np + 4n = n(p+4)$. Nên:

$$4n^2 + (p^2 - 8)(p+4) : n(p+4) \quad (*)$$

Từ (*), suy ra $4n^2 + (p^2 - 8)(p+4) : (p+4)$ mà $(p^2 - 8)(p+4) : (p+4)$

$$4n^2 : (p+4)$$

Trường hợp 1: $p = 2$ Khi đó $p+4 = 6$. Thế vào (*), ta được:

$$4n^2 + (4 - 8) \cdot 6 : 6n \Rightarrow 4n^2 - 24 : 6n \Rightarrow 2n^2 - 12 : 3n$$

Suy ra $2n^2 - 12 : 3 \Rightarrow 2n^2 : 3$ suy ra $n : 3$. Đặt $n = 3m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$), ta có $18m^2 - 12 : 9m \Rightarrow 6m^2 - 4 : 3m$. Từ đó $4 : 3m$ (vô lý) vì $m \geq 1$ thì $3m$ không thể là ước của 4.

Vậy $p = 2$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $p > 2$ Vì p là số nguyên tố lớn hơn 2 nên p là số lẻ, suy ra $p+4$ là số lẻ. Do đó, $\text{ƯCLN}(p+4, 4) = 1$. Kết hợp với $4n^2 : (p+4)$, ta suy ra:

$$n^2 : (p+4) \quad (1)$$

Gọi $d = \text{ƯCLN}(n, p+4)$. Đặt $n = d \cdot x$ và $p+4 = d \cdot y$, với $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và $\text{ƯCLN}(x, y) = 1$. Từ (1), ta có $d^2 x^2 : dy \Rightarrow dx^2 : y$. Vì $\text{ƯCLN}(x, y) = 1$ nên $d : y$. Đặt $d = c \cdot y$ ($c \in \mathbb{Z}^+$). Khi đó:

$$p+4 = cy^2 \quad (2)$$

Quay trở lại điều kiện chia hết (*), khi chia cho $n(p+4)$ ta phải được một số nguyên. Đặt biểu thức đó là K :

$$K = \frac{4n^2 + (p^2 - 8)(p+4)}{n(p+4)} = \frac{4d^2x^2 + (p^2 - 8)dy}{d^2xy} = \frac{4dx^2 + (p^2 - 8)y}{dxy} \in \mathbb{Z}$$

Thay $d = cy$ vào biểu thức trên:

$$K = \frac{4cyx^2 + (p^2 - 8)y}{cy^2x} = \frac{4cx^2 + p^2 - 8}{cyx} \in \mathbb{Z}$$

Để K là số nguyên, tử số phải chia hết cho mẫu số. Đặc biệt, tử số phải chia hết cho c :

$$4cx^2 + p^2 - 8 : c \Rightarrow p^2 - 8 : c$$

Mặt khác, từ (2) ta có $c = \frac{p+4}{y^2}$. Thế vào điều kiện trên, ta được:

$$p^2 - 8 : \frac{p+4}{y^2} \Rightarrow y^2(p^2 - 8) : (p+4)$$

Ta có: $p^2 - 8 = (p-4)(p+4) + 8$. Khi đó:

$$y^2[(p-4)(p+4) + 8] : (p+4) \Rightarrow y^2(p-4)(p+4) + 8y^2 : (p+4)$$

Suy ra:

$$8y^2 : (p+4)$$

Vì $p+4$ là số lẻ nên $\text{ƯCLN}(p+4, 8) = 1$. Do đó:

$$y^2 : (p+4)$$

Tuy nhiên, ta đã biết $p+4 = cy^2$. Để $y^2 : cy^2$ (với c nguyên dương), ta bắt buộc phải có $c = 1$.

Thế $c = 1$ vào phương trình (2), ta có:

$$p+4 = y^2 \Rightarrow p = y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$$

Vì p là số nguyên tố và $y-2 < y+2$, nên bắt buộc nhân tử nhỏ hơn phải bằng 1:

$$y-2 = 1 \Rightarrow y = 3$$

Thay $y = 3$ vào, ta tìm được số nguyên tố p :

$$p = 3^2 - 4 = 5 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

Bây giờ ta đi tìm n . Với $p = 5$, ta có $y = 3$, $c = 1$, suy ra $d = c \cdot y = 3$. Lúc này $p+4 = 9$ và $p^2 - 8 = 17$. Điều kiện $\frac{4cx^2 + p^2 - 8}{cyx} \in \mathbb{Z}$ trở thành:

$$\frac{4x^2 + 17}{3x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x^2 + 17 : 3x$$

Suy ra $4x^2 + 17 : x \Rightarrow 17 : x$. Vì x là số nguyên dương và 17 là số nguyên tố nên $x \in \{1; 17\}$.

- Nếu $x = 1 \Rightarrow n = d.x = 3 \cdot 1 = 3$.
- Nếu $x = 17 \Rightarrow n = d.x = 3 \cdot 17 = 51$.

Thử lại:

- Với cặp (3; 5): Thay vào ta được $(4 \cdot 9 + 17 \cdot 9): 27 = (36 + 153): 27 = 7$ (Thỏa mãn).
- Với cặp (51; 5): Thay vào ta được $(4 \cdot 2601 + 17 \cdot 9): 459 = (10404 + 153): 459 = 23$ (Thỏa mãn).

Vậy có 2 cặp số nguyên dương $(n; p)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là (3; 5) và (51; 5).

2) - Tìm giá trị nhỏ nhất của P :

Từ giả thiết $a + b + c = 2$, ta phân tích:

$$2a = a(a + b + c) = a^2 + ab + ca$$

Thay vào P , ta được:

$$\frac{bc + 2a + 1}{a^2 + 1} = \frac{a^2 + ab + bc + ca + 1}{a^2 + 1} = 1 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + 1}$$

Thực hiện tương tự với hai phân thức còn lại và cộng vế theo vế ta được :

$$P = 3 + (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right)$$

Vì $a, b, c \geq 0$ nên $ab + bc + ca \geq 0$. Mặt khác, ta luôn có:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} > 0 \quad \text{với mọi } a, b, c$$

Suy ra $P \geq 3 + 0 = 3$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $ab + bc + ca = 0$. Kết hợp với điều kiện $a + b + c = 2$ và các biến không âm, hệ này có nghiệm khi hai biến bằng 0 và một biến bằng 2. Tức là (a, b, c) là một hoán vị của bộ số (2,0,0).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 xảy ra khi (a, b, c) là một hoán vị của bộ số (2,0,0).

- Tìm giá trị lớn nhất của P :

Từ phân chứng minh trước, Đặt $q = ab + bc + ca$. Ta có:

$$P = 3 + q \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right)$$

Ta có bất đẳng thức: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow 4 \geq 3q \Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{4}{3}$.

Biến đổi biểu thức trong ngoặc:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 3 - \left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \right)$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức, ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+1+b^2+1+c^2+1} = \frac{4}{a^2+b^2+c^2+3}$$

Mặt khác, $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 4 - 2q$. Do đó:

$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \geq \frac{4}{(4-2q)+3} = \frac{4}{7-2q}$$

Thay trở lại P , ta thu được đánh giá:

$$P \leq 3 + q \left(3 - \frac{4}{7-2q} \right) = 3 + q \left(\frac{17-6q}{7-2q} \right) = \frac{-6q^2 + 11q + 21}{7-2q}$$

Ta sẽ chứng minh $P \leq \frac{75}{13}$ bằng cách xét hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{75}{13} - \frac{-6q^2 + 11q + 21}{7-2q} &= \frac{75(7-2q) - 13(-6q^2 + 11q + 21)}{13(7-2q)} \\ &= \frac{525 - 150q + 78q^2 - 143q - 273}{13(7-2q)} \\ &= \frac{78q^2 - 293q + 252}{13(7-2q)} \\ &= \frac{78q^2 - 104q - 189q + 252}{13(7-2q)} \\ &= \frac{26q(3q-4) - 63(3q-4)}{13(7-2q)} \\ &= \frac{(4-3q)(63-26q)}{13(7-2q)} \end{aligned}$$

Với điều kiện $0 \leq q \leq \frac{4}{3}$ ta có

- $4 - 3q \geq 0$
- $63 - 26q \geq 63 - 26\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{189-104}{3} = \frac{85}{3} > 0$
- $7 - 2q \geq 7 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{21-8}{3} = \frac{13}{3} > 0$

Do tử số và mẫu số của phân thức đều không âm, suy ra hiệu số trên ≥ 0

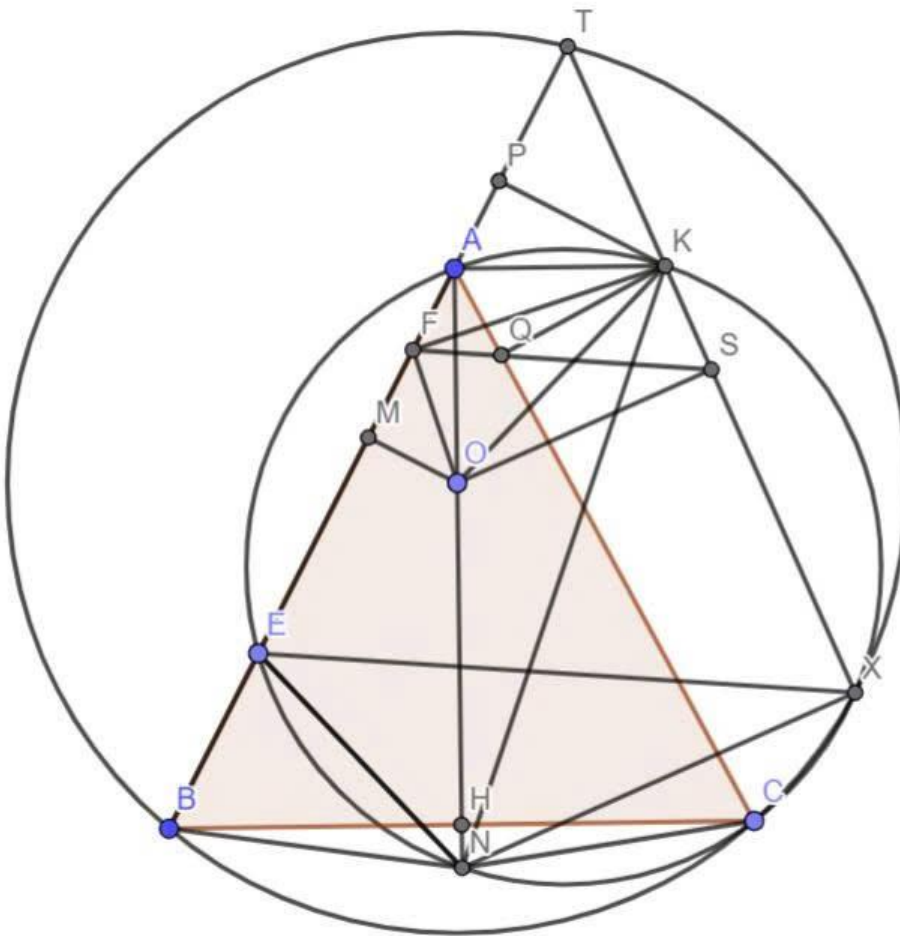
$$\Rightarrow \frac{-6q^2 + 11q + 21}{7-2q} \leq \frac{75}{13}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{75}{13}$$

Dấu “=” xảy ra khi $4 - 3q = 0 \Rightarrow q = \frac{4}{3}$. Kết hợp với giả thiết $a + b + c = 2$, ta suy ra $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{75}{13}$ xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Câu IV.



1) Dễ dàng chứng minh $NE=NB=NC$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC .

Ta có $NE=NB$ nên tam giác NEB cân tại N nên $\widehat{NBE} = \widehat{NEB}$ (1)

Mà $\triangle ABN = \triangle ACN$ (c.g.c) Suy ra $\widehat{NBE} = \widehat{ACN}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{NEB} = \widehat{ACN}$

Mà $\widehat{NEB} + \widehat{NEA} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{NCA} + \widehat{NEA} = 180^\circ$

Do đó: bốn điểm N, C, A, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng AB. Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp dây cung BT, suy ra M là trung điểm của BT.

Kẻ $KP \perp AB$ tại P và $KQ \perp AC$ tại Q. Vì $AK \parallel BC$ và $AH \perp BC$ nên $AK \perp AH$. Do AH là tia phân giác trong của $\angle BAC$, đường thẳng AK vuông góc với phân giác trong tại đỉnh A nên AK là đường phân giác ngoài của $\angle BAC$ tại đỉnh A.

Vì K nằm trên đường phân giác ngoài nên khoảng cách từ K đến hai cạnh AB, AC bằng nhau: $KP = KQ$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle AKP$ và $\triangle AKQ$ có

AK chung

$KP = KQ$ (cmt)

suy ra $\triangle AKP = \triangle AKQ$ (ch-cgv)

Suy ra $AP = AQ$.

Do K thuộc trung trực CE nên $KC = KE$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle KPE$ và $\triangle KQC$ có:

$KE = KC$ (tính chất đường trung trực)

$KP = KQ$ (cmt)

Suy ra $\triangle KPE = \triangle KQC$ (ch-cgv)

Suy ra $PE = QC$.

Ta có

$PE = PA + AE$

$QC = AC - AQ = AB - AP$ (do $AC = AB$ và $AQ = AP$).

Từ $PE = QC$ (cmt)

Suy ra $PA + AE = AB - AP \Rightarrow 2PA = AB - AE \Rightarrow PA = (AB - AE) / 2$ (3)

Vì M là trung điểm BT, F là trung điểm ET, ta có:

$MF = MT - FT = (BT / 2) - (ET / 2) = BE / 2 = (AB - AE) / 2$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $MF = PA$.

Ta có:

$FP = AP + AF = [(AB - AE) / 2] + [(AE - AT) / 2] = (AB - AT) / 2$.

$AM = AB - BM = AB - (BT / 2) = AB - [(AB + AT) / 2] = (AB - AT) / 2$.

Do đó: $FP = AM$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle OMA$ (vuông tại M) và $\triangle KPA$ (vuông tại P) ta có:

$\angle OAM = \angle AKB$ (cùng phụ $\angle PAK$)

Suy ra $\triangle AOM \sim \triangle KAP$ (g-g)

$OM / PA = AM / KP$ hay $OM \cdot KP = PA \cdot AM$.

Mà $MF = PA$ và $FP = AM$

Suy ra $OM \cdot KP = MF \cdot FP \Rightarrow OM / FP = MF / KP$.

Xét $\triangle OMF$ và $\triangle FPK$ có:

$\angle OMF = \angle FPK = 90^\circ$

$OM / FP = MF / KP$ (cmt)

Suy ra $\triangle OMF \sim \triangle FPK$ (c-g-c)

Suy ra $\angle OFM = \angle FKP$.

Ta có: $\angle OFK = 180^\circ - (\angle OFM + \angle KFP) = 180^\circ - (\angle FKP + \angle KFP) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (Đpcm).

3) Gọi X là giao điểm thứ hai của đường thẳng TK với đường tròn (O) bán kính OB. Ta cần chứng minh X nằm trên đường tròn đường kính NK, tức là chứng minh $\widehat{NXX} = 90^\circ$.

Kẻ $OS \perp TK$ tại S. Vì O là tâm đường tròn (O) ngoại tiếp dây cung TX nên S chính là trung điểm của TX.

Ta có $AK \parallel BC$ và $AH \perp BC$ (đường cao) suy ra $AK \perp AH$.

Ta có $OA \perp AK$ hay $\widehat{OAK} = 90^\circ$ và $\widehat{NAK} = 90^\circ$.

Mặt khác,

- $\widehat{OAK} = 90^\circ$ (cmt).

- $\widehat{OFK} = 90^\circ$ (cmt).

- $\widehat{OSK} = 90^\circ$ (do $OS \perp TK$).

Suy ra 5 điểm O, A, F, S, K cùng nội tiếp đường tròn đường kính OK.

Xét đường tròn đường kính OK dễ dàng chứng minh: $TA \cdot TF = TS \cdot TK$.

Mà $TF = \frac{ET}{2}$ (do F là trung điểm ET) và $TS = \frac{TX}{2}$ (do S là trung điểm TX)

Do đó

$$TA \cdot \left(\frac{ET}{2}\right) = \left(\frac{TX}{2}\right) \cdot TK$$

$$\Rightarrow TA \cdot ET = TX \cdot TK.$$

$\Rightarrow X$ nằm trên đường tròn đi qua A, K, E (đây chính là đường tròn đường kính NK do AENK nội tiếp và AN vuông góc với AK) Suy ra 3 đường trên đều đi qua X

Câu V.

1) Ta có: $a_k = a_i + 4a_j$ (với mọi $2 \leq k \leq n$ và $i, j < k$).

Xét modul 2, ta có:

$$a_k \equiv a_i + 4a_j \equiv a_i + 0 \equiv a_i \pmod{2}$$

Hay a_k (với $k \geq 2$) có cùng tính chẵn lẻ với a_i ($i < k$).

Từ đó ta suy ra mọi a_k trong tập S đều có cùng tính chẵn lẻ với a_1 . Nói cách khác, tất cả các phân tử $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều có cùng tính chẵn lẻ.

Kết hợp với (i), ta có $a_n = 2000$ là một số chẵn nên tất cả các phân tử còn lại trong tập hợp S cũng phải là số chẵn (đpcm).

2) Từ $a_k = a_i + 4a_j$, xét modul 4, chứng minh tương tự ý 1 ta được:

$$a_k \equiv a_i \pmod{4}$$

Suy ra mọi phân tử trong tập S đều có cùng số dư khi chia cho 4. Vì $a_n = 2000$ chia hết cho 4 nên mọi phân tử $a_k \in S$ đều chia hết cho 4.

Đặt $a_k = 4b_k$ với $b_k \in \mathbb{Z}^+$, dãy b_k tăng ngặt: $b_1 < b_2 < \dots < b_n = \frac{2000}{4} = 500$. Thay vào (ii) ta có:

$$4b_k = 4b_i + 4(4b_j) \Rightarrow b_k = b_i + 4b_j \quad (1)$$

Chứng minh tương tự bên trên, ta có mọi b_k đều chia hết cho 4.

Đặt $b_k = 4c_k$ với $c_k \in \mathbb{Z}^+$, dãy c_k tăng ngặt: $c_1 < c_2 < \dots < c_n = \frac{500}{4} = 125$. Thay vào (1), ta được:

$$4c_k = 4c_i + 4(4c_j) \Rightarrow c_k = c_i + 4c_j$$

Lại chứng minh tương tự cho dãy c_k : Ta có $c_k \equiv c_i \pmod{4}$, Mà $c_n = 125 \equiv 1 \pmod{4}$. Từ đó suy ra tất cả các phân tử c_k đều chia 4 dư 1.

Mà $c_1 < c_2 < \dots < c_n = 125$ nên tập hợp các giá trị có thể có của c_k là tập con của tập hợp sau:

$$M = \{1, 5, 9, 13, \dots, 125\}$$



Trung tâm Toán & Khoa học TP-edu.vn

Thầy Tô Cường, cô Nguyễn Tới, cô Ngọc Trân, thầy Phạm Tuyền, thầy Tuấn Đạt, thầy Đình Tùng, thầy Trịnh Hiệp & cộng sự.
Liên hệ: 0349.705.576. Số 2 ngõ 95 Hoàng Cầu

Khi đó số lượng phần tử tối đa của dãy c_k là số lượng phần tử của tập hợp M

Hay $n \leq 32$.

Ta xét $n = 32$:

Xét dãy $c_k = 4k - 3$ với $k = 1, 2, \dots, 32$ có đúng 32 phần tử, tăng ngặt và $c_{32} = 4 \cdot 32 - 3 = 125$. Với mọi $k \geq 2$, ta chọn $i = k - 1$ và $j = 1$. Khi đó $i < k$ và $j = 1 < 2 \leq k$. Ta có:

$$\begin{aligned}c_{k-1} + 4c_1 &= [4(k-1) - 3] + 4(4 \times 1 - 3) \\&= 4k - 7 + 4 \\&= 4k - 3 = c_k\end{aligned}$$

Thỏa mãn (ii)

Khi đó, dãy a_k được xác định bởi $a_k = 16c_k = 16(4k - 3)$ (với $k = 1, \dots, 32$) thỏa mãn toàn bộ yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị lớn nhất của n là 32.