

Chữa đề Chuyên Toán – vòng 2 Chuyên Khoa học Tự nhiên Ngày 24/5/2026

Câu I.

$$1) 1 + 5\sqrt[3]{1 - 25x^2} + \sqrt[3]{1 + 5x} + \sqrt[3]{1 - 5x} = 4(\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 - 5x)^2})$$

Tập xác định: $x \in \mathbb{R}$. Đặt $a = \sqrt[3]{1 + 5x}$ và $b = \sqrt[3]{1 - 5x}$. Từ đó, ta có hai nhận xét quan trọng:

- $ab = \sqrt[3]{(1 + 5x)(1 - 5x)} = \sqrt[3]{1 - 25x^2}$
- Tổng lập phương: $a^3 + b^3 = (1 + 5x) + (1 - 5x) = 2$

Thay a và b vào phương trình ban đầu, ta được:

$$1 + 5ab + a + b = 4(a^2 + b^2)$$

$$1 + 5ab + (a + b) = 4[(a + b)^2 - 2ab]$$

$$1 + 13ab + (a + b) - 4(a + b)^2 = 0$$

Đặt $S = a + b$ và $P = ab$. Ta có hệ:

1. $1 + 13P + S - 4S^2 = 0 \Rightarrow 13P = 4S^2 - S - 1$
2. $a^3 + b^3 = S^3 - 3SP = 2 \Rightarrow 3SP = S^3 - 2$

Nhân hai vế của phương trình (1) với $3S$, ta được:

$$13(3SP) = 3S(4S^2 - S - 1)$$

Thay $3SP = S^3 - 2$ từ phương trình (2) vào:

$$13(S^3 - 2) = 12S^3 - 3S^2 - 3S$$

$$13S^3 - 26 = 12S^3 - 3S^2 - 3S$$

$$S^3 + 3S^2 + 3S - 26 = 0$$

$$(S^3 + 3S^2 + 3S + 1) - 27 = 0$$

$$(S + 1)^3 = 27$$

$$S + 1 = 3 \Rightarrow S = 2$$

Với $S = 2$, thay vào (1) ta có: $13P = 4(2)^2 - 2 - 1 = 13 \Rightarrow P = 1$. Ta có hệ $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases}$. Theo định lý Vi-ét đảo, a, b là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$. Suy ra $a = 1$ và $b = 1$.

Suy ra $\sqrt[3]{1 + 5x} = 1 \Rightarrow 1 + 5x = 1 \Rightarrow x = 0$. (Thử lại $x = 0$ vào điều kiện $b = 1$ cũng thỏa mãn $\sqrt[3]{1 - 0} = 1$).

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu I.

2)

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 + 6xy + x = 3(x^2 + 4y^2) + 1 & (1) \\ x^3 + 2 = x^2 + 2y & (2) \end{cases}$$

Đặt $x = u + 1$ và $2y = v + 1$.

Thay vào phương trình (1):

$$(u + 1)^3 + (v + 1)^3 + 3(u + 1)(v + 1) + (u + 1) = 3(u + 1)^2 + 3(v + 1)^2 + 1$$

Khai triển hai vế:

- VT: $(u^3 + 3u^2 + 3u + 1) + (v^3 + 3v^2 + 3v + 1) + (3uv + 3u + 3v + 3) + u + 1 = u^3 + v^3 + 3u^2 + 3v^2 + 3uv + 7u + 6v + 6$

VP: $3(u^2 + 2u + 1) + 3(v^2 + 2v + 1) + 1 = 3u^2 + 3v^2 + 6u + 6v + 7$

Suy ra

$$u^3 + v^3 + 3uv + u - 1 = 0 \quad (*)$$

Thay vào phương trình (2):

$$(u + 1)^3 + 2 = (u + 1)^2 + (v + 1)$$

$$(u^3 + 3u^2 + 3u + 1) + 2 = (u^2 + 2u + 1) + v + 1$$

$$v - 1 = u^3 + 2u^2 + u$$

$$v - 1 = u(u + 1)^2 \quad (**)$$

ta có:

$$u^3 + v^3 + 3uv - 1 = (u + v - 1)(u^2 + v^2 + 1 - uv + u + v)$$

Thế vào (*), ta được:

$$(u + v - 1)(u^2 + v^2 - uv + u + v + 1) + u = 0$$

ta có $u + v - 1 = u + u(u + 1)^2 = u[(u + 1)^2 + 1]$.

$$u[(u + 1)^2 + 1](u^2 + v^2 - uv + u + v + 1) + u = 0$$

$$u \cdot \left[((u+1)^2 + 1) \cdot (u^2 + v^2 - uv + u + v + 1) + 1 \right] = 0$$

$$u^2 + v^2 - uv + u + v + 1 = \frac{1}{2} [(u-v)^2 + (u+1)^2 + (v+1)^2] \geq 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

Vì $((u+1)^2 + 1) \geq 1$ và biểu thức trên ≥ 0 , nên toàn bộ cụm:

$$((u+1)^2 + 1) \cdot (u^2 + v^2 - uv + u + v + 1) + 1 \geq 1 > 0$$

Phương trình chỉ xảy ra khi:

$$u = 0$$

Thay $u = 0$ vào (), ta có $v - 1 = 0 \Rightarrow v = 1$.

Trả lại biến cũ:

- $x = u + 1 \Rightarrow x = 1$
- $2y = v + 1 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Câu II.

1) Chứng minh rằng khi $x = y$ thì không tồn tại z thỏa mãn phương trình.

Thay $x = y$ vào phương trình ban đầu, ta được:

$$(x^3 + x)(x^3 + x) = 3^z$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 + 1)^2 = 3^z$$

Ta xét tính chẵn lẻ của hai vế phương trình:

- **Vế trái:** Ta có x^2 và $x^2 + 1$ là hai số nguyên liên tiếp, luôn có một số là số chẵn. Do đó, tích $x^2(x^2 + 1)^2$ luôn luôn là một số chẵn.
- **Vế phải:** Vì cơ số là 3 (số lẻ) nên với mọi số nguyên dương z , lũy thừa 3^z luôn luôn là một số lẻ.

Điều này dẫn đến vô lý. Vậy khi $x = y$, không tồn tại z thỏa mãn phương trình. (ĐPCM)

Câu II.

2) Tìm tất cả các bộ (x, y, z) thỏa mãn phương trình với $x > y$

Xét phương trình: $(x^3 + y)(y^3 + x) = 3^z$. Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $x^3 + y$ và $y^3 + x$ đều phải là các lũy thừa của 3. Đặt hệ:

$$\begin{cases} x^3 + y = 3^m \\ y^3 + x = 3^n \end{cases}$$

(với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và $m + n = z$).

Vì $x > y \geq 1 \Rightarrow x^3 + y > y^3 + x \Rightarrow 3^m > 3^n \Rightarrow m > n \geq 1$.

Do đó, $3^m : 3^n \Rightarrow (x^3 + y) : (y^3 + x)$

$$x^3 + y = (x^3 + y^9) - (y^9 - y) = (x + y^3)(x^2 - xy^3 + y^6) - y(y^8 - 1)$$

Vì $(x + y^3)(x^2 - xy^3 + y^6) : (x + y^3)$ nên: $y(y^8 - 1) : (x + y^3)$

$$\Rightarrow y(y^8 - 1) : 3^n \quad (*)$$

Giả sử $y : 3$, đặt $y = 3^c \cdot d$ (với $c \geq 1$ và d không chia hết cho 3).

Khi đó $y^8 - 1 = (3^c d)^8 - 1 \equiv -1 \pmod{3}$, tức là $(y^8 - 1)$ không chia hết cho 3.

Từ (*) suy ra toàn bộ lũy thừa của 3 phải nằm trong y , tức là $y : 3^n \Rightarrow y \geq 3^n$. Tuy nhiên, ta lại có giả thiết $y^3 < y^3 + x = 3^n \Rightarrow y < \sqrt[3]{3^n} < 3^n$ (mâu thuẫn). Vậy y không chia hết cho 3.

Do $(y, 3) = 1$, từ (*) ta bắt buộc phải có:

$$y^8 - 1 : 3^n$$

Phân tích: $y^8 - 1 = (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1)(y^4 + 1)$. Vì y không chia hết cho 3 nên y chia 3 dư 1 hoặc -1.

- $y^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (không chia hết cho 3).
- $y^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y^4 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (không chia hết cho 3).
- Xét hiệu $(y + 1) - (y - 1) = 2$ không chia hết cho 3, nên 3 không thể đồng thời là ước của $(y - 1)$ và $(y + 1)$. Suy ra trong 4 thừa số trên, chỉ có duy nhất một thừa số chứa phân tích ra thừa số nguyên tố có cơ số 3. Do đó, 3^n phải là ước của $(y - 1)$ hoặc $(y + 1)$.

Trường hợp 1 : 3^n là ước của $y - 1$

Nếu $y > 1 \Rightarrow y - 1 > 0$. Khi đó $y - 1 \geq 3^n \Rightarrow y > 3^n$. Điều này mâu thuẫn với đánh giá $y^3 < 3^n$ ở trên. Vậy bắt buộc $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$. Thay $y = 1$ vào hệ ban đầu, ta có:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 3^m \\ 1 + x = 3^n \end{cases}$$

Từ phương trình trên, ta có :

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 3^m \Rightarrow 3^n(x^2 - x + 1) = 3^m \Rightarrow x^2 - x + 1 = 3^{m-n}$$

Thế $x = 3^n - 1$ vào phương trình bậc hai:

$$\begin{aligned} (3^n - 1)^2 - (3^n - 1) + 1 &= 3^{m-n} \\ \Rightarrow 3^{2n} - 2 \cdot 3^n + 1 - 3^n + 1 &= 3^{m-n} \\ \Rightarrow 3(3^{2n-1} - 3^n + 1) &= 3^{m-n} \end{aligned}$$

Vì $n \geq 1$ nên biểu thức trong ngoặc $(3^{2n-1} - 3^n + 1)$ chia 3 dư 1. Để tích này là lũy thừa của 3, thì bản thân ngoặc này phải bằng 1:

$$\Rightarrow 3^{2n-1} - 3^n + 1 = 1 \Rightarrow 3^{2n-1} = 3^n \Rightarrow 2n - 1 = n \Rightarrow n = 1$$

Thế $n = 1$ vào phương trình $x + 1 = 3^n \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

Khi đó, $x^3 + 1 = 2^3 + 1 = 9 = 3^2 \Rightarrow m = 2$. Tổng $z = m + n = 2 + 1 = 3$.

Thử lại: $(2^3 + 1)(1^3 + 2) = 9 \cdot 3 = 27 = 3^3$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: 3^n là ước của $y + 1$.

Vì $y \geq 1 \Rightarrow y + 1 > 0$, nên $y + 1 \geq 3^n$. Ta có kẹp: $y^3 < y^3 + x = 3^n \leq y + 1$.

$$\Rightarrow y^3 < y + 1 \Rightarrow y^3 - y - 1 < 0$$

Với các số nguyên dương, nếu $y \geq 2$ thì $y^3 - y - 1 \geq 8 - 2 - 1 = 5 > 0$ (vô lý).

Vậy chỉ có thể $y = 1 \Rightarrow y + 1 = 2$. Mà 3^n là ước của 2, điều này vô lý vì với $n \geq 1$ thì $3^n \geq 3 > 2$. (Trường hợp này vô nghiệm)

Kết luận: Bộ số nguyên dương (x, y, z) duy nhất thỏa mãn phương trình với $x > y$ là $(2, 1, 3)$.

Câu III.

Ta có $a + b + c + d = 1$, do đó biểu thức S được viết lại thành:

$$S = \sum a^4(a + b + c + d) - \sum a^5 = \sum a^4(1 - a)$$

Bổ đề: Với mọi $c, d \geq 0$ thỏa mãn $c + d \leq \frac{2}{3}$, ta luôn có:

$$c^4(1 - c) + d^4(1 - d) \leq (c + d)^4[1 - (c + d)]$$

Chứng minh: Đặt $u = c + d \geq 0$ và $v = cd \geq 0$. Ta có $v \leq \frac{u^2}{4}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(c + d)^5 - c^5 - d^5 \leq (c + d)^4 - c^4 - d^4$$

Ta có $c^2 + d^2 = u^2 - 2v$ và $c^3 + d^3 = u^3 - 3uv$:

$$\Leftrightarrow 5cd(c^3 + d^3) + 10c^2d^2(c + d) \leq 4cd(c^2 + d^2) + 6c^2d^2$$

$$\Leftrightarrow 5v(u^3 - 3uv) + 10uv^2 \leq 4v(u^2 - 2v) + 6v^2$$

$$\Leftrightarrow 5u^3v - 5uv^2 \leq 4u^2v - 2v^2$$

+) Nếu $v = 0$, BĐT hiển nhiên đúng.

+) Xét $v > 0$, chia cả hai vế cho v :

$$5u^3 - 5uv \leq 4u^2 - 2v \Leftrightarrow v(2 - 5u) + u^2(5u - 4) \leq 0 \quad (*)$$

Trường hợp 1: Nếu $u \leq \frac{2}{5}$, ta có $2 - 5u \geq 0$. Do $v \leq \frac{u^2}{4}$ nên:

$$VT(*) \leq \frac{u^2}{4}(2 - 5u) + u^2(5u - 4) = \frac{u^2}{4}(2 - 5u + 20u - 16) = \frac{u^2}{4}(15u - 14)$$

Vì $u \leq \frac{2}{5} < \frac{14}{15}$ nên $15u - 14 < 0 \Rightarrow VT(*) \leq 0$.

Trường hợp 2: Nếu $\frac{2}{5} < u \leq \frac{2}{3}$, ta có $2 - 5u < 0 \Rightarrow v(2 - 5u) \leq 0$.

Lại có $5u - 4 \leq 5\left(\frac{2}{3}\right) - 4 = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow u^2(5u - 4) \leq 0$.

Cộng vế theo vế $\Rightarrow VT(*) \leq 0$ (đpcm).

Áp dụng bổ đề:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Do tổng 4 số bằng 1 nên $c + d \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

Áp dụng Bổ đề cho c và d , ta có:

$$S \leq a^4(1 - a) + b^4(1 - b) + x^4(1 - x) \quad \text{với } x = c + d \text{ và } a + b + x = 1$$

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 3 số a, b, x có tổng bằng 1, luôn tồn tại 2 số có tổng $\leq \frac{2}{3}$.

Giả sử hai số đó là b và x , áp dụng Bổ đề cho cặp này, ta đưa bài toán về 2 biến $X, Y \geq 0$ thỏa mãn $X + Y = 1$:

$$S \leq X^4(1 - X) + Y^4(1 - Y)$$

Do $1 - X = Y$ và $1 - Y = X$, ta phân tích:

$$\begin{aligned} S &\leq X^4Y + XY^4 = XY(X^3 + Y^3) = XY(X + Y)(X^2 - XY + Y^2) \\ &= XY(1 - 3XY) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho 2 số không âm $3XY$ và $(1 - 3XY)$:

$$3S \leq 3XY(1 - 3XY) \leq \frac{(3XY + 1 - 3XY)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow S \leq \frac{1}{12}$$

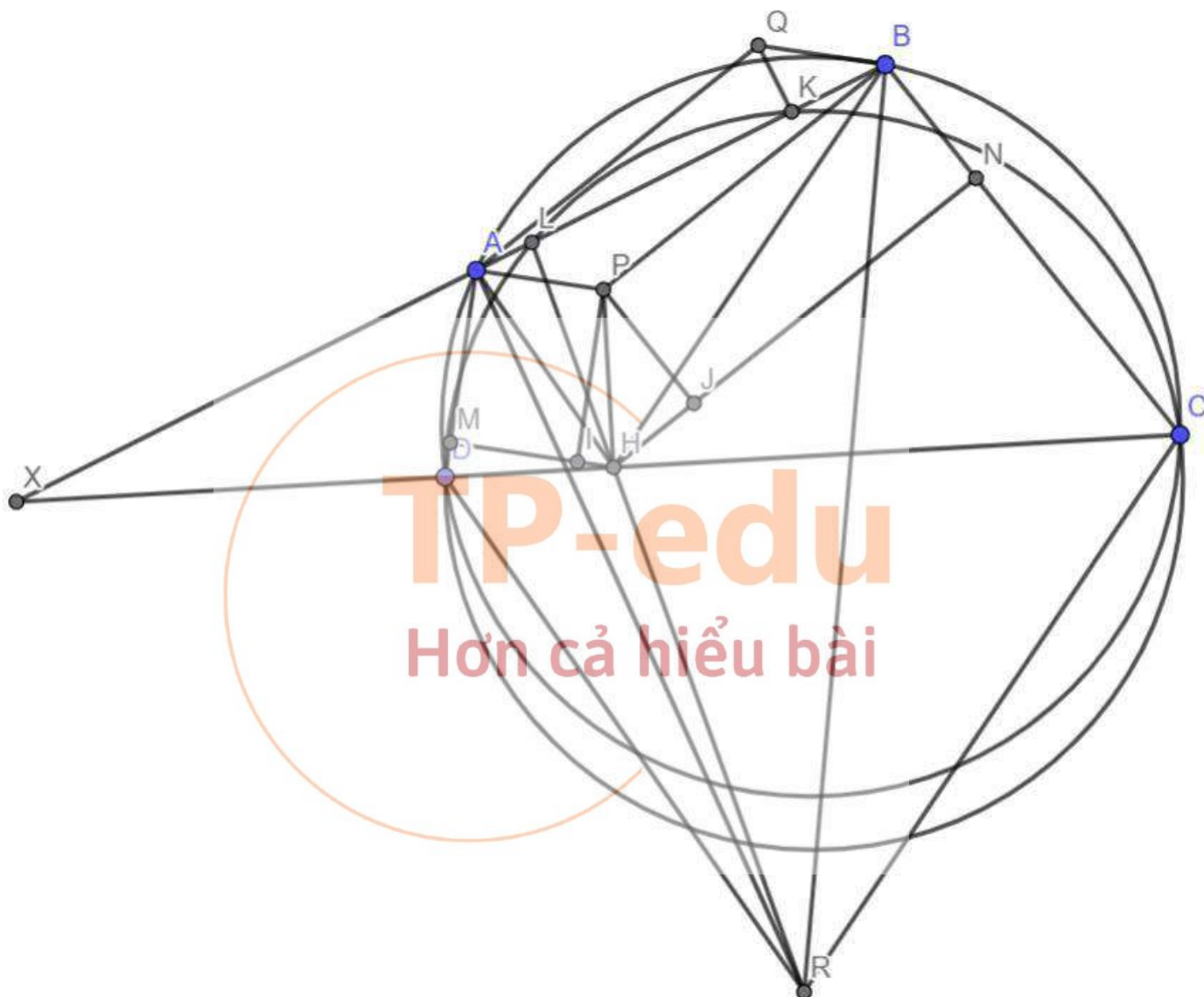
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $3XY = 1 - 3XY \Leftrightarrow XY = \frac{1}{6}$.

Kết hợp hệ phương trình $\begin{cases} X + Y = 1 \\ XY = \frac{1}{6} \end{cases}$,

Theo định lý Viète đảo, X và Y là nghiệm của phương trình $T^2 - T + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow T = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\max S = \frac{1}{12}$, đạt được khi (a, b, c, d) là một hoán vị của bộ số $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$

Câu IV.



1) Chứng minh rằng $\widehat{KQB} = \widehat{BCD}$

Gọi E là giao điểm của đường thẳng QB và đường thẳng AD .

Vì $PAQB$ là hình bình hành nên $QB \parallel PA$. Theo giả thiết $PA \perp AD$, suy ra $QB \perp AD$, do đó $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

Xét tam giác vuông ABE vuông tại E , ta có:

$$\widehat{ABE} = 90^\circ - \widehat{BAE}$$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) suy ra $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Ngoài ra ta có:

$$\widehat{BAE} = 180^\circ - \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$$

Thay vào trên, ta được:

$$\widehat{ABE} = 90^\circ - \widehat{BCD}$$

Mặt khác, K là hình chiếu vuông góc của Q lên AB nên $\widehat{QKB} = 90^\circ$.

Xét tam giác vuông QKB :

$$\widehat{KQB} = 90^\circ - \widehat{QKB} = 90^\circ - \widehat{ABE} = 90^\circ - (90^\circ - \widehat{BCD}) = \widehat{BCD}$$

Vậy $\widehat{KQB} = \widehat{BCD}$ (đpcm).

2) Chứng minh rằng $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$

Ta chứng minh tương tự ý 1: Gọi giao điểm của QA và BC là F .

Do $QA \parallel PB$ và $PB \perp BC$ nên $QA \perp BC$. Từ đó suy ra $\widehat{KQA} = \widehat{ADC}$.

Trong tam giác vuông QKB , ta có: $KB = QK \cdot \tan \widehat{KQB} = QK \cdot \tan \widehat{BCD}$

Trong tam giác vuông QKA , ta có: $KA = QK \cdot \tan \widehat{KQA} = QK \cdot \tan \widehat{ADC}$

Suy ra:

$$\frac{KB}{KA} = \frac{\tan \widehat{BCD}}{\tan \widehat{ADC}} \quad (1)$$

Kẻ $HM \perp AD$ ($M \in AD$) và $HN \perp BC$ ($N \in BC$).

Kẻ $PI \perp HM$ ($I \in HM$) và $PJ \perp HN$ ($J \in HN$).

Vì $PA \perp AD$ và $HM \perp AD$ nên $PA \parallel HM$.

Cùng với $PI \perp HM$, tứ giác $PAIM$ là hình chữ nhật.

Suy ra $PA = MI = HM - HI$.

Trong tam giác vuông HMD , $HM = HD \cdot \sin \widehat{ADC}$.

Vì $PH \perp CD$ và $HM \perp AD$, $\widehat{ADC}$ là góc giữa hai đường thẳng

Do đó trong tam giác vuông PHI , ta có $HI = PH \cdot \cos \widehat{ADC}$.

Từ đó: $PA = HD \cdot \sin \widehat{ADC} - PH \cdot \cos \widehat{ADC}$.

Tương tự: $PB = HC \cdot \sin \widehat{BCD} - PH \cdot \cos \widehat{BCD}$.

Theo tính chất hình bình hành $PAQB$, $QA = PB$ và $QB = PA$. Lại có $QK = QB \cdot \cos \widehat{QKB} = PA \cdot \cos \widehat{BCD}$ và $QK = QA \cdot \cos \widehat{KQA} = PB \cdot \cos \widehat{ADC}$. Từ đó: $PA \cdot \cos \widehat{BCD} = PB \cdot \cos \widehat{ADC} \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{\cos \widehat{ADC}}{\cos \widehat{BCD}}$.

Biến đổi hệ thức của PA và PB :

$$HD \cdot \sin \widehat{ADC} = PA + PH \cdot \cos \widehat{ADC}$$

$$HC \cdot \sin \widehat{BCD} = PB + PH \cdot \cos \widehat{BCD}$$

Xét tỉ số:

$$\frac{HD \cdot \sin \widehat{ADC}}{HC \cdot \sin \widehat{BCD}} = \frac{PA + PH \cdot \cos \widehat{ADC}}{PB + PH \cdot \cos \widehat{BCD}} = \frac{PB \frac{\cos \widehat{ADC}}{\cos \widehat{BCD}} + PH \cdot \cos \widehat{ADC}}{PB + PH \cdot \cos \widehat{BCD}} = \frac{\cos \widehat{ADC}}{\cos \widehat{BCD}}$$

Do đó:

$$\frac{HD}{HC} = \frac{\sin \widehat{BCD} \cdot \cos \widehat{ADC}}{\sin \widehat{ADC} \cdot \cos \widehat{BCD}} = \frac{\tan \widehat{BCD}}{\tan \widehat{ADC}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$ (đpcm).

3) Chứng minh rằng các điểm D, C, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Cách 1:

Gọi X là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD .

Vì $DR \parallel AH$, do đó $S_{ARH} = S_{AHD}$. Tương tự, $CR \parallel BH \Rightarrow S_{BRH} = S_{BHC}$.

Vì L là giao điểm của RH và AB , theo tỉ số diện tích chung đáy RH :

$$\frac{AL}{BL} = \frac{S_{ARH}}{S_{BRH}} = \frac{S_{AHD}}{S_{BHC}}$$

Kẻ h_A, h_B lần lượt là khoảng cách từ A, B xuống đường thẳng CD . Ta có:

$$S_{AHD} = \frac{1}{2} HD \cdot h_A \quad \text{và} \quad S_{BHC} = \frac{1}{2} HC \cdot h_B$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AL}{BL} = \frac{HD \cdot h_A}{HC \cdot h_B} = \frac{HD}{HC} \cdot \frac{h_A}{h_B}$$

Mặt khác, do $X = AB \cap CD$, theo định lý Thales ta có $\frac{h_A}{h_B} = \frac{XA}{XB}$. Từ đó:

$$\frac{AL}{BL} = \frac{HD}{HC} \cdot \frac{XA}{XB}$$

Theo chứng minh ở câu 2, ta có $\frac{KA}{KB} = \frac{HC}{HD}$, suy ra $\frac{AK}{BK} = \frac{HC}{HD}$. Nhân hai tỉ số lại, ta được:

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{AK}{BK} = \left(\frac{HD}{HC} \cdot \frac{XA}{XB} \right) \cdot \left(\frac{HC}{HD} \right) = \frac{XA}{XB}$$

Thay $AL = |XL - XA|$, $BL = |XB - XL|$, $AK = |XK - XA|$, $BK = |XB - XK|$, phương trình trên tương đương với:

$$\frac{XL - XA}{XB - XL} \cdot \frac{XK - XA}{XB - XK} = \frac{XA}{XB}$$

Nhân chéo và khai triển:

$$XB \cdot (XL \cdot XK - XA \cdot XL - XA \cdot XK + XA^2) = XA \cdot (XB^2 - XB \cdot XK - XB \cdot XL + XL \cdot XK)$$

Giản ước hai vế các cụm đại lượng $-XA \cdot XB \cdot XL$ và $-XA \cdot XB \cdot XK$, ta thu được:

$$XB \cdot XL \cdot XK + XA^2 \cdot XB = XA \cdot XB^2 + XA \cdot XL \cdot XK$$

$$\Leftrightarrow XL \cdot XK \cdot (XB - XA) = XA \cdot XB \cdot (XB - XA)$$

Vì $A \neq B$ nên $XB - XA \neq 0$, do đó:

$$XK \cdot XL = XA \cdot XB$$

Theo tính chất của tứ giác nội tiếp $ABCD$, giao điểm X của hai cát tuyến XAB và XDC thỏa mãn phương tích đường tròn:

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

Từ hai điều trên, ta có:

$$XK \cdot XL = XC \cdot XD$$

Hệ thức này chứng tỏ phương tích của X đối với đường tròn đi qua 4 điểm D, C, K, L là bằng nhau. Do đó, 4 điểm D, C, K, L cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

Cách 2:



C) Gọi (AHB) cắt CD tại J khác H . Ta có

$$\angle RDC = \angle AHD = \angle JBA, \quad \angle RCD = \angle BHJ = \angle JAB$$

$$\Rightarrow \Delta J_{AB} \sim \Delta R_{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{RC}{JA} \quad \text{mà lại có} \quad \frac{KA}{KB} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{HC}{KA}$$



Trung tâm Toán & Khoa học TP-edu.vn

Thầy Tô Cường, cô Nguyễn Tới, cô Ngọc Trân, thầy Phạm Tuyền, thầy Tuấn Đạt, thầy Đình Tùng, thầy Thành Đạt & cộng sự.
Liên hệ: 0349.705.576. Số 2 ngõ 95 Hoàng Cầu

$$\Rightarrow \frac{RC}{JA} = \frac{HC}{KA}$$

$$\Rightarrow \triangle RHC \sim \triangle JKA$$

$$\Rightarrow \angle RHC = \angle JKA \quad \text{hay tứ giác } JKLI \text{ nội tiếp.}$$

Sử dụng bổ đề: ABCD là tứ giác nội tiếp, AB cắt CD tại I.

ABCD là tứ giác nội tiếp ($\Rightarrow$) $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Gọi CD cắt AB tại I, từ các tứ giác JKLI, ABJI và ABCD nội tiếp, suy ra $IL \cdot IK = IH \cdot IJ = IA \cdot IB = IC \cdot ID$

$\Rightarrow IKLD$ nội tiếp.



Câu V.

Gọi M là giá trị lớn nhất trong dãy số đã cho, c_v là số lần xuất hiện của giá trị v trong dãy số ($1 \leq v \leq M$).

Vì dãy có 600 phần tử, ta có phương trình:

$$\sum_{v=1}^M c_v = 600$$

Đề tạo thành một bộ (a_i, a_j, a_k) với $i < j < k$ thỏa mãn $a_j = a_i + 1$ và $a_k = a_j + 1$, ba giá trị của dãy tại các vị trí đó phải lần lượt là $(v, v + 1, v + 2)$.

Với một giá trị v cụ thể, số lượng bộ ba lớn nhất đạt được khi các phần tử trong dãy xuất hiện theo cụm tăng dần (tất cả số v đứng trước số $v + 1$, số $v + 1$ đứng trước số $v + 2$). Khi đó, số bộ tạo thành là $c_v \cdot c_{v+1} \cdot c_{v+2}$.

Do đó, tổng số bộ m luôn bị chặn trên bởi tổng các tích:

$$m \leq \sum_{v=1}^{M-2} c_v c_{v+1} c_{v+2}$$

Chia các biến c_v thành 3 nhóm A, B, C dựa theo số dư của chỉ số v khi chia cho 3:

- $A = \sum_{3k+1 \leq M} c_{3k+1}$
- $B = \sum_{3k+2 \leq M} c_{3k+2}$
- $C = \sum_{3k \leq M} c_{3k}$

Tổng của ba nhóm này chính là tổng số phần tử của dãy:

$$A + B + C = \sum_{v=1}^M c_v = 600$$

Trong mỗi số hạng $c_v c_{v+1} c_{v+2}$, ba nhân tử tương ứng với 3 số nguyên liên tiếp. Do đó, theo tính chất đồng dư, 3 nhân tử này luôn rơi vào đúng 3 nhóm phân biệt A, B và C .

Vì tất cả các $c_v \geq 0$, tổng của các tích thành phần sẽ không bao giờ vượt quá tích của tổng các nhóm:

$$\sum_{v=1}^{M-2} c_v c_{v+1} c_{v+2} \leq A \cdot B \cdot C$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số thực không âm A, B, C :

$$m \leq A \cdot B \cdot C \leq \left(\frac{A+B+C}{3} \right)^3$$

Thay $A + B + C = 600$ vào, ta thu được:

$$m \leq \left(\frac{600}{3} \right)^3 = 200^3 = 8\,000\,000$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = 200$.

Chọn $c_1 = 200$, $c_2 = 200$, $c_3 = 200$ và $c_v = 0$ với mọi $v > 3$.

Dãy số tối ưu là dãy được sắp xếp tăng dần, gồm 200 số 1, tiếp theo là 200 số 2 và cuối cùng là 200 số 3:

$$(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, 3, \dots, 3)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{200} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{200} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{200}$

Số bộ (a_i, a_j, a_k) thỏa mãn điều kiện đề bài cho dãy này là $200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000$.