

ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ CHUYÊN TOÁN(TIN) THI VÀO 10 HÀ NỘI NĂM 2026

Câu I.

1) Gọi 4 viên bi trong hộp lần lượt là: X (màu xanh), Đ (màu đỏ), T (màu tím), V (màu vàng). Khi lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ trong hộp, các kết quả có thể xảy ra là các tập hợp gồm 2 viên bi:

$$\{X, Đ\}; \{X, T\}; \{X, V\}; \{Đ, T\}; \{Đ, V\}; \{T, V\}$$

Như vậy, có tất cả 6 kết quả có thể xảy ra. Do các viên bi có cùng kích thước và khối lượng nên các kết quả này là đồng khả năng.

Biến cố A: “Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh”. Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là các tập hợp lấy ra 2 viên bi có chứa viên bi X, bao gồm:

$$\{X, Đ\}; \{X, T\}; \{X, V\}$$

Như vậy, có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A.

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Xác suất cần tìm là $\frac{1}{2}$.

2) Theo giả thiết, a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:

$$2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$$

$$4a^2 + 4b^2 + 2c^2 - 4ac - 4bc = 0$$

$$(4a^2 - 4ac + c^2) + (4b^2 - 4bc + c^2) = 0$$

$$(2a - c)^2 + (2b - c)^2 = 0 \quad (*)$$

Ta có:

$$\begin{cases} (2a - c)^2 \geq 0 \\ (2b - c)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2a - c)^2 + (2b - c)^2 \geq 0$$

Do đó, dấu “=” ở phương trình (*) xảy ra khi và chỉ khi cả hai số hạng đồng thời bằng 0:

$$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2a \\ c = 2b \end{cases} \Rightarrow 2a = 2b = c$$

Từ đó suy ra $a = b = \frac{c}{2}$. Mặt khác, vì a, b, c là các số thực dương nên $c > 0 \Rightarrow c + 1 > 0 \Rightarrow c + 1 \neq 0$ (đảm bảo mẫu số của P luôn khác 0).

Thay $a = \frac{c}{2}$ và $b = \frac{c}{2}$ vào biểu thức P , ta có:

$$P = \frac{\frac{c}{2}}{2 \cdot \frac{c}{2} + 1} + \frac{\frac{c}{2}}{2 \cdot \frac{c}{2} + 1} + \frac{1}{c + 1}$$

$$P = \frac{\frac{c}{2}}{c+1} + \frac{\frac{c}{2}}{c+1} + \frac{1}{c+1}$$
$$P = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2} + 1}{c+1} = \frac{c+1}{c+1} = 1$$

Kết luận: Giá trị của biểu thức là $P = 1$.

Câu II.

1) Theo đề bài, a và b là các số nguyên dương.

Ta có: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (*)

Vì $a^3 - b^3$ là số nguyên tố, nên $a > b$, suy ra $a - b > 0$.

Do $a, b \in \mathbb{Z}^+$ nên $a^2 + ab + b^2 \geq 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 = 3$.

Ta có $a^2 + ab + b^2 > a - b$.

Số nguyên tố chỉ có đúng hai ước nguyên dương là 1 và chính nó nên: $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$

Thay $a = b + 1$ vào lại biểu thức (*), ta được:

$$a^3 - b^3 = (b+1)^3 - b^3 = (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) - b^3 = 3b^2 + 3b + 1 = 3b(b+1) + 1$$

Đặt $P = 3b(b+1) + 1 + 2027 = 3b(b+1) + 2028$

Vì b và $b+1$ là hai số nguyên dương liên tiếp nên $b(b+1) \vdots 2$.

Suy ra $3b(b+1) \vdots (3 \cdot 2)$ hay $3b(b+1) \vdots 6$.

Mặt khác $2028 = 6 \cdot 338$.

Suy ra $P \vdots 6$ hay $(a^3 - b^3 + 2027) \vdots 6$. (Điều phải chứng minh)

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn:

$$3^x - 1 = 2 \cdot 13^y$$

Vì $y \geq 1$ nên vế phải: $2 \cdot 13^y \equiv 2 \cdot 1^y \equiv 2 \pmod{4}$. Giả sử x chẵn, đặt $x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$), ta có vế trái:

$$3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod{4}$$

Điều này vô lý vì $0 \not\equiv 2 \pmod{4}$. Do đó, x bắt buộc phải là số lẻ

Lại có :

$$3^x - 1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod{13}$$

Ta có chu kỳ số dư của lũy thừa 3 khi chia cho 13 là: $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13}$.

Để $3^x \equiv 1 \pmod{13}$ thì x phải chia hết cho 3.



Trung tâm Toán & Khoa học TP-edu.vn

Thầy Tô Cường, cô Nguyễn Tới, cô Ngọc Trân, thầy Phạm Tuyền, thầy Tuấn Đạt, thầy Đình Tùng, thầy Trịnh Hiệp & cộng sự.
Liên hệ: 0349.705.576. Số 2 ngõ 95 Hoàng Cầu

Vì x lẻ và chia hết cho 3, đặt $x = 3k$ (với k là số nguyên dương lẻ). Phương trình trở thành:

$$3^{3k} - 1 = 2 \cdot 13^y$$

$$(3^k - 1)(3^{2k} + 3^k + 1) = 2 \cdot 13^y$$

Gọi $d = \text{ƯCLN}(3^k - 1, 3^{2k} + 3^k + 1)$. Ta có:

$$d = \text{ƯCLN}(3^k - 1, (3^k - 1)(3^k + 2) + 3) = \text{ƯCLN}(3^k - 1, 3)$$

Vì $3^k - 1$ không chia hết cho 3 nên $d = 1$. Suy ra hai nhân tử về trái là nguyên tố cùng nhau.

Mặt khác, vì k lẻ nên $3^k \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 3^k - 1 \equiv 2 \pmod{4}$.

Tức là $(3^k - 1)$ là số chẵn không chia hết cho 4, còn $(3^{2k} + 3^k + 1)$ là số lẻ. Vì hai nhân tử nguyên tố cùng nhau và có tích bằng $2 \cdot 13^y$, ta bắt buộc phải có hệ:

$$\begin{cases} 3^k - 1 = 2 \\ 3^{2k} + 3^k + 1 = 13^y \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, ta có:

$$3^k = 3 \Rightarrow k = 1$$

Thay $k = 1$ vào phương trình thứ hai:

$$3^2 + 3^1 + 1 = 13 \Rightarrow 13^y = 13 \Rightarrow y = 1$$

Với $k = 1$, ta có $x = 3k = 3$. Thử lại vào phương trình ban đầu: $3^3 - 1 = 2 \cdot 13^1 \Leftrightarrow 26 = 26$ (thỏa mãn).

Vậy cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn bài toán là $(x; y) = (3; 1)$.

Câu III.

1) Từ giả thiết $ab = 6c^2 \Rightarrow 9abc = 54c^3$. Đặt $P = \frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$. Ta có $2P = a^3 + b^3 + 27c^3$

Áp dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Với $x = a, y = b, z = -3c$:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + (-3c)^3 - 3ab(-3c) &= (a + b - 3c)(a^2 + b^2 + (-3c)^2 - ab - b(-3c) - (-3c)a) \\ \Rightarrow a^3 + b^3 - 27c^3 + 9abc &= (a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3bc + 3ca) \end{aligned}$$

Thế $9abc = 54c^3$ vào vế trái:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - 27c^3 + 54c^3 &= (a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3bc + 3ca) \\ \Rightarrow 2P &= (a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3bc + 3ca) \end{aligned}$$

Đặt $A = a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3bc + 3ca$:

$$A = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 9c^2 + 3bc + 3ca$$

Vì a, b, c là các số nguyên dương ($a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$), ta có:

- $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$
- $\frac{3b^2}{4} > 0$
- $9c^2 + 3bc + 3ca \geq 9(1)^2 + 3(1)(1) + 3(1)(1) = 15$

Do đó, $A \geq 15 > 2$

Mặt khác, vì P là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của $2P$ chỉ thuộc tập hợp $\{1, 2, P, 2P\}$.

Vì $2P = (a + b - 3c) \cdot A$ và $A > 2$, suy ra A không thể nhận giá trị 1 hoặc 2. Suy ra $A \in \{P, 2P\}$, nhân tử còn lại bắt buộc phải nhận các giá trị là 2 hoặc 1.

Tức là:

$$a + b - 3c \in \{1, 2\}$$

- Trường hợp 1: $a + b - 3c = 1 \Rightarrow a + b = 3c + 1$. Kết hợp với giả thiết $ab = 6c^2$, theo Viète đảo, a và b là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - (3c + 1)X + 6c^2 = 0$$

Để tồn tại a, b , phương trình phải có $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = (3c + 1)^2 - 24c^2 = -15c^2 + 6c + 1 \geq 0$$

Ta có: $-15c^2 + 6c + 1 = -9c^2 - 6c(c - 1) + 1$. Vì $c \geq 1$ nên $c^2 \geq 1$ và $c(c - 1) \geq 0$.

Do đó: $-15c^2 + 6c + 1 \leq -9(1) - 0 + 1 = -8 < 0$. Điều này mâu thuẫn với $\Delta \geq 0$. Vậy trường hợp này vô nghiệm.

- Trường hợp 2: $a + b - 3c = 2 \Rightarrow a + b = 3c + 2$. Lúc này, a và b là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - (3c + 2)X + 6c^2 = 0$$

$$\Delta = (3c + 2)^2 - 24c^2 = -15c^2 + 12c + 4 \geq 0$$

$$\Delta = 4 - 3c(5c - 4)$$

Nếu $c \geq 2$: Ta có $3c \geq 6$ và $5c - 4 \geq 6 \Rightarrow 3c(5c - 4) \geq 36$. Khi đó $\Delta \leq 4 - 36 = -32 < 0$ (Phương trình vô nghiệm).

Do đó, giá trị nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện $\Delta \geq 0$ là $c = 1$.

Thay $c = 1$ vào Δ , ta có $\Delta = -15(1) + 12(1) + 4 = 1 > 0$ (thỏa mãn).

Phương trình trở thành: $X^2 - 5X + 6 = 0$. Giải phương trình ta được $X = 2$ hoặc $X = 3$. Suy ra $(a, b) = (2, 3)$ hoặc $(a, b) = (3, 2)$.

Thử lại với $(a, b, c) = (2, 3, 1)$ hoặc $(3, 2, 1)$, ta thay vào biểu thức P :

$$P = \frac{2^3 + 3^3 + 27 \cdot 1^3}{2} = \frac{8 + 27 + 27}{2} = \frac{62}{2} = 31$$

Nhận thấy 31 là một số nguyên tố, thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy các bộ số nguyên dương (a, b, c) cần tìm là $(2, 3, 1)$ và $(3, 2, 1)$

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}$$

- Tìm giá trị nhỏ nhất của T

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức, ta có:

$$T \geq \frac{(a + b + c)^2}{(ab + bc + ca) + 2(a + b + c) + 9} = \frac{9}{ab + bc + ca + 15}$$

Mặt khác, ta có : $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$. Suy ra: $ab + bc + ca + 15 \leq 3 + 15 = 18$. Từ đó, ta có:

$$T \geq \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{1}{2}$ xảy ra khi $a = b = c = 1$

- Tìm giá trị lớn nhất của T

Vì $b, c \geq 0$ nên $bc \geq 0$. Ta có đánh giá:

$$\frac{a^2}{bc + 2a + 3} \leq \frac{a^2}{2a + 3} \quad (1)$$

Ta đi chứng minh $\frac{a^2}{2a+3} \leq \frac{a}{3}$ bằng xét hiệu:

$$\frac{a}{3} - \frac{a^2}{2a + 3} = \frac{a(2a + 3) - 3a^2}{3(2a + 3)} = \frac{a(3 - a)}{3(2a + 3)}$$

Do $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$ nên $0 \leq a \leq 3$. Suy ra $a(3 - a) \geq 0$ và $3(2a + 3) > 0$.

Do đó hiệu số luôn lớn hơn hoặc bằng 0, dẫn đến $\frac{a^2}{2a+3} \leq \frac{a}{3} \quad (2)$

Từ (1) và (2) :

$$\frac{a^2}{bc + 2a + 3} \leq \frac{a}{3}$$

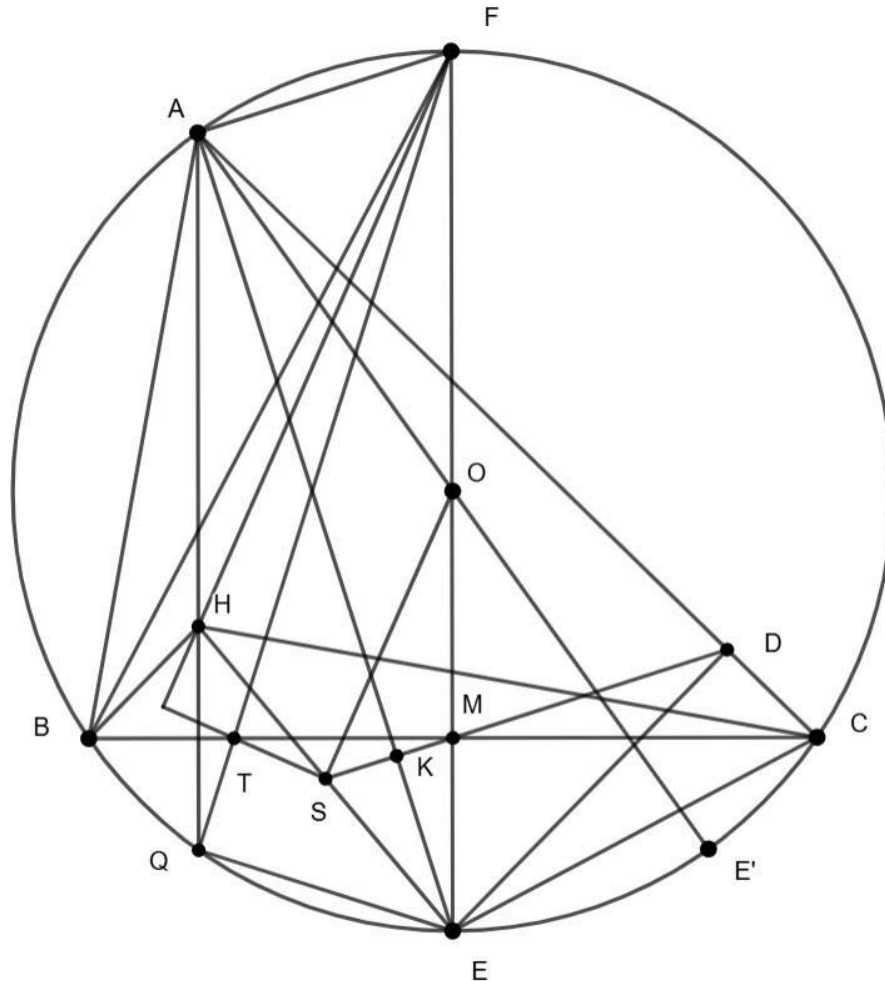
Tương tự với hai phân thức còn lại và cộng vế theo vế, ta có:

$$T \leq \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{a + b + c}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một biến bằng 3 và hai biến bằng 0.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 1 xảy ra khi (a, b, c) là hoán vị của $(3, 0, 0)$

Câu IV.



1) Dễ dàng chứng minh tứ giác EMDC nội tiếp

Suy ra $\widehat{MDC} + \widehat{MEC} = 180$

Mà $\widehat{MEC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Do đó $\widehat{MDC} + \widehat{BCA} = 180$

Suy ra $\widehat{MDC} = \widehat{BAF}$ (cùng bù $\widehat{BCA}$)

Xét $\triangle BAF$ và $\triangle MDC$:

$\widehat{BFA} = \widehat{MCD}$ (cùng chắn cung AB)

$\widehat{MDC} = \widehat{BAF}$ (cmt)

suy ra $\triangle BAF \sim \triangle MDC$ (g-g).

2) *Chứng minh $S \in MD$:

Gọi E' là điểm đối xứng của A qua O (AE' là đường kính của (O)).

Dễ dàng chứng minh $BHCE'$ là hình bình hành

Mà M là trung điểm BC

M cũng là trung điểm của HE' .

Xét $\triangle HEE'$, ta có S là trung điểm HE (gt), M là trung điểm HE' .

$\Rightarrow SM$ là đường trung bình của $\triangle HEE'$

$\Rightarrow SM \parallel EE'$.

Mặt khác, vì AE' là đường kính nên $\widehat{AEE'} = 90^\circ$

$\Rightarrow AE \perp EE'$. Từ đó suy ra $SM \perp AE$. (1)

Gọi K là giao điểm của MD và AE .

Vì tứ giác $EMDC$ nội tiếp, ta có $\widehat{MDE} = \widehat{MCE} = \widehat{BCE}$.

Vì E là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên cung $BE =$ cung CE , suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{CAE} (= \widehat{BAE})$

Trong $\triangle vu\text{ông} ADE$ ($\widehat{ADE} = 90^\circ$), ta có $\widehat{AED} = 90^\circ - \widehat{CAE} = 90^\circ - \widehat{MDE}$.

$\Rightarrow MD \perp AE$. (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow SM \perp AE$ và $MD \perp AE$ suy ra S, M, D thẳng hàng. Vậy S thuộc đường thẳng MD .

*Chứng minh $\widehat{T\hat{S}O} = 90^\circ$:

Dễ dàng chứng minh BC là đường trung trực của HQ . Vì $T \in BC \Rightarrow TH = TQ$.

Xét $\triangle EHF$, có O là trung điểm EF (do EF là đường kính), S là trung điểm $EH \Rightarrow OS$ là đường trung bình của $\triangle EHF \Rightarrow OS \parallel HF$.

Để chứng minh $OS \perp ST$ (tức $\widehat{T\hat{S}O} = 90^\circ$), ta cần chứng minh $HF \perp ST$, tương đương với việc chứng minh $TF^2 - TH^2 = SF^2 - SH^2$.

Ta có T, Q, F thẳng hàng ta có: $TF^2 - TH^2 = (EM - DH)(FM - DH) + FM^2 - DH^2$
 $= FM(EM + FM) - DH(EM + FM) = FE \cdot (FM - DH)$

Kẻ đường cao HH' của $\triangle FHE$ ($H' \in FE$).

$$\Rightarrow SF^2 = \frac{2(FH^2 + FE^2) - HE^2}{4}$$

Mà $SH^2 = \frac{HE^2}{4}$, suy ra: $SF^2 - SH^2 = \frac{FH^2 + FE^2 - HE^2}{2}$

Lại có:

$$HE^2 = FH^2 + FE^2 - 2FE \cdot FH' \Rightarrow FH^2 + FE^2 - HE^2 = 2FE \cdot FH'$$

Thay vào ta được

$$SF^2 - SH^2 = FE \cdot FH'$$

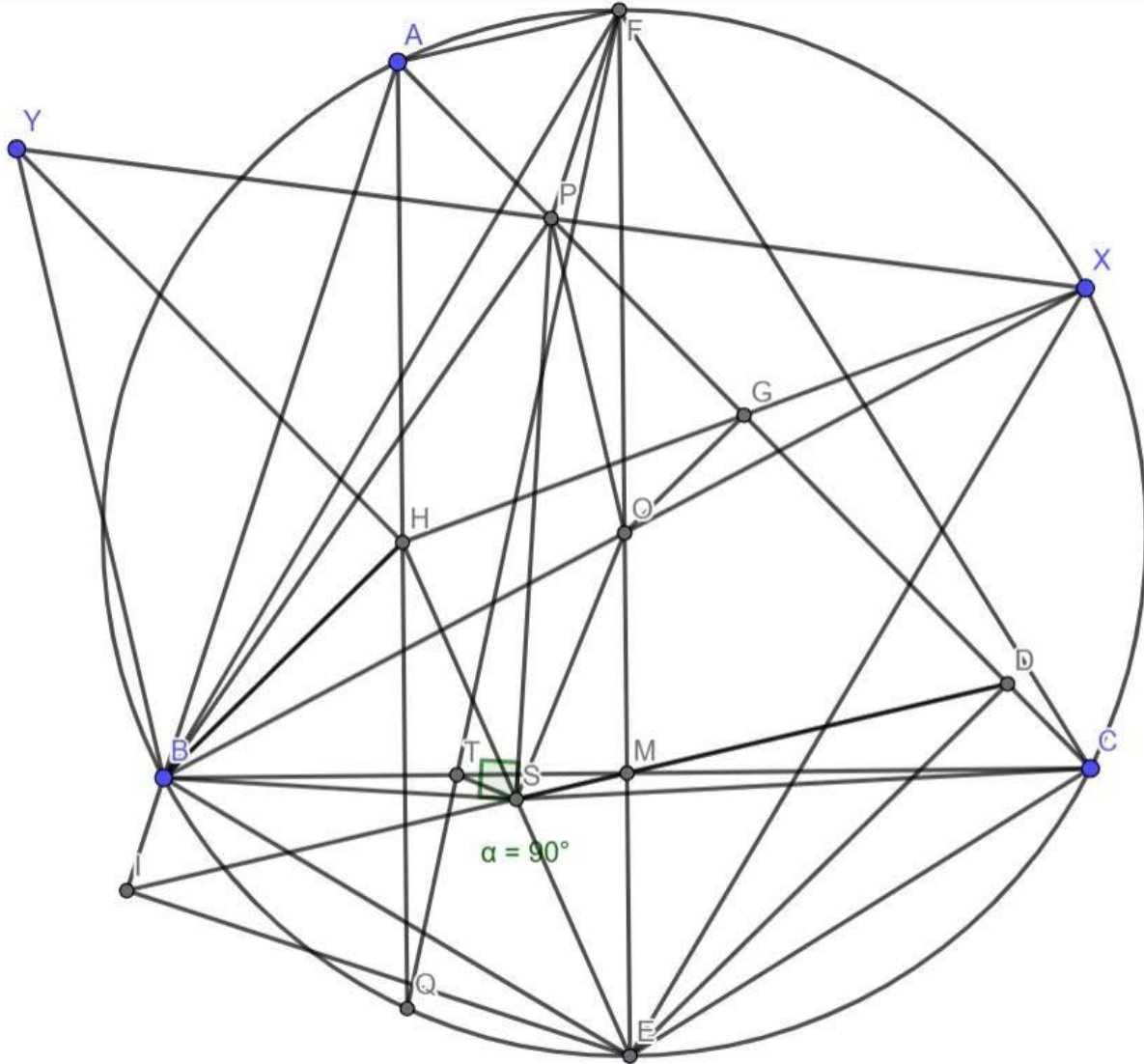
$$\Rightarrow SF^2 - SH^2 = FE \cdot (FM - HD)$$

$\Rightarrow TF^2 - TH^2 = SF^2 - SH^2$.

$\Rightarrow HF \perp ST$.

Kết hợp với $OS \parallel HF$, ta có $OS \perp ST \Rightarrow \widehat{T\hat{S}O} = 90^\circ$ (đpcm)

3)



Kẻ $OP' \perp AF$ sao cho $P' \in AC$. Kẻ đường kính BX , Y đối xứng X qua P' , G trung điểm AC

$$\Rightarrow \begin{cases} P' \text{ trung điểm } XY \\ G \text{ trung điểm } HX \\ O \text{ trung điểm } BX \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BHY \sim \triangle OGP' \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \widehat{OP'G} = 90^\circ - \widehat{P'AF} = 90^\circ - \widehat{CBF} = \widehat{BFE} = \widehat{BXE}$$

Mà $\triangle OGP'$ vuông tại G , $\triangle BEX$ vuông tại E

$$\Rightarrow \triangle OGP' \sim \triangle BEX \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \triangle BHY \sim \triangle BEX$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{BH}{BE} = \frac{BY}{BX} \\ \widehat{HB\bar{Y}} = \widehat{EB\bar{X}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BE}{BX} = \frac{BH}{BY} \\ \widehat{EBH} = \widehat{XBY} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta EBH \sim \Delta XBY$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{XY}{EH} = \frac{BX}{BE} \Rightarrow \frac{P'X}{SE} = \frac{BX}{BE} \\ \widehat{YXB} = \widehat{HEB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta BXP' \sim \Delta BES$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{BS}{BP'} = \frac{EB}{BX} \\ \widehat{XBP'} = \widehat{EBS} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BS}{BE} = \frac{BP'}{BX} \\ \widehat{SBP'} = \widehat{EBX} \end{cases} \Rightarrow \Delta BSP' \sim \Delta BEX$$

$$\Rightarrow \widehat{BSP'} = \widehat{BEX} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow SP' \perp BS \quad (3)$$

Xét đường tròn tâm O , AF là dây cung, OP' là một phần của đường kính vuông góc với dây cung AF

$$\Rightarrow P'A = P'F \quad (4)$$

Ta có $P \in AF$ và thỏa mãn:

$$SP \perp BS \quad (5)$$

Từ (3) và (5), cả P và P' đều nằm trên đường thẳng $AF \Rightarrow P \equiv P'$

Vì $P \equiv P'$, thay vào (4) ta có:

$$PA = PF \text{ (Điều phải chứng minh)}$$

Câu V.

1) Khi $n = 2$, chứng minh $a_3 - a_1 \geq 4$.

Theo (i), ta có $a_1 < a_2 < a_3$, tức $a_3 - a_2 \geq 1$ và $a_2 - a_1 \geq 1$.

Suy ra $a_3 - a_1 \geq 2$.

Giả sử $a_3 - a_1 < 4$. Vì $a_3 - a_1$ là số nguyên ≥ 2 , nên chỉ có thể xảy ra hai trường hợp:

(*) Trường hợp 1: $a_3 - a_1 = 2$. Loại vì với $n = 2$, ta phải có $a_i - a_j \neq 2$ với mọi $i > j$.

(*) Trường hợp 2: $a_3 - a_1 = 3$. Vì $a_3 - a_1 = (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = 3$ và cả hai số hạng đều là số nguyên dương, nên chỉ có 2 trường hợp nữa xảy ra:

+) Trường hợp con 1: $a_3 - a_2 = 1$ và $a_2 - a_1 = 2$. Loại do có $a_2 - a_1 = 2 = n$.

+) Trường hợp con 2: $a_3 - a_2 = 2$ và $a_2 - a_1 = 1$. Loại do có $a_3 - a_2 = 2 = n$.

Vậy điều giả sử là sai, hay $a_3 - a_1 \geq 4$. (đpcm)

2) Chia tập hợp các số nguyên ≥ 2 thành các dãy gồm $2n$ số liên tiếp:

$$S_0 = \{2, 3, \dots, 2n + 1\}$$

$$S_1 = \{2 + 2n, 2 + 2n + 1, \dots, 2 + 4n - 1\}$$

...

$$S_k = \{2 + 2kn, \dots, 2 + 2(k + 1)n - 1\}$$

Ta xét biểu diễn $100 = q \cdot n + r$ ($0 < r \leq n$)

Hay $q = \left\lfloor \frac{99}{n} \right\rfloor$. Ta chọn q từ tập S_k đầu tiên và chọn thêm r phần tử từ tập S_q tiếp theo.

Trong tập S_k , chọn nửa đầu tiên gồm n số: $\{2 + 2kn, 2 + 2kn + 1, \dots, 2 + 2kn + n - 1\}$.

Chọn n số đầu từ $S_0, S_1, \dots, S_{q-1}$, ($q \cdot n$ số).

Chọn r số đầu tiên từ tập S_q : $2 + 2qn, 2 + 2qn + 1, \dots, 2 + 2qn + r - 1$. Khi đó phần tử thứ 100 là: $a_{100} = 2 + 2qn + r - 1 = 2qn + r + 1$

Thay $r = 100 - qn$: $a_{100} = 2qn + (100 - qn) + 1 = 101 + qn$

Khi đó, ta cần tìm $n \leq 99$ để qn đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta xét 2 khoảng của n :

+) $n \geq 50$: Vì $n \leq 99$ nên $q = \left\lfloor \frac{99}{n} \right\rfloor = 1$. Hay $qn = n$. Vì $n \geq 50$ nên $qn \geq 50$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $n = 50$.

+) $n \leq 49$: Suy ra $q = \left\lfloor \frac{99}{n} \right\rfloor \geq 2$.

Ta cũng có $qn \leq 99 < qn + n \Rightarrow qn > 99 - n$

Vì $n \leq 49$, suy ra $qn > 99 - 49 = 50$. Hay $qn > 50$ với mọi $n \leq 49$.

Từ hai đánh giá trên, ta thấy qn đạt giá trị nhỏ nhất bằng 50 khi và chỉ khi $n = 50$.

Lúc này, a_{100} nhỏ nhất sẽ bằng $101 + 50 = 151$.

Với $n = 50$, ta chọn dãy số như sau:

Chọn 50 số đầu tiên: $2, 3, 4, \dots, 51$. Chọn 50 số tiếp theo: $102, 103, 104, \dots, 151$

Dãy 100 phần tử: $A = \{2, 3, \dots, 51\} \cup \{102, 103, \dots, 151\}$ thỏa mãn mọi điều kiện của đề bài.

Vậy giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất là $n = 50$.